

CENTRO DE ESTUDIOS PARA LA CALIDAD EDUCATIVA Y LA INVESTIGACIÓN
CIENTÍFICA. INCORPORADA A LA SECRETARIA DE EDUCACIÓN PÚBLICA ID: 9264

TÍTULO:

Metodología para el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial en los
estudiantes, en el periodo (2016 – 2019) en el Preuniversitario Mártires de Porvenir de la
Habana, Cuba.

**TESIS EN OPCIÓN AL GRADO CIENTÍFICO DE
DOCTOR EN CIENCIAS PEDAGÓGICAS**

PRESENTA:

MÁSTER. WILBER ORTIZ AGUILAR.

ASESORES:

DR. MICHEL ENRIQUE GAMBOA GRAUS

DRA. GRACIELA ABAD PEÑA

DR. JUAN ENRIQUE GARCÍA LA ROSA

TOLUCA, ESTADO DE MÉXICO, OCTUBRE 2019.

AGRADECIMIENTOS

“Una actitud de agradecimiento tiene el poder de convertir las dificultades en oportunidades, los problemas en soluciones, las pérdidas en ganancias, y además expande nuestra visión y nos permite descubrir todo aquello que era invisible para nosotros debido a nuestra actitud limitadora (...).”

Louise Hay, 2003.

- A mi familia por su apoyo y confianza.*
- A mis asesores de tesis, Dr. Michel Enrique Gamboa Graus, Dra. Graciela Abad Peña y Dr. Juan Enrique García La Rosa, por haber confiado en mí, por su valiosa ayuda y enseñanza incondicional.*
- A las Doctoras Katia Lisset Fernández y Ana Durán, por todo lo que aportaron en mi formación.*
- Al Ms.C. Francisco Javier Bruno por su valiosa ayuda.*
- A mi hermano Geraldó, por apoyarme en todos los momentos.*
- A mis compañeros del IPU “Mártires de Porvenir” por su ayuda.*
- A CECEIC por haberme dado la posibilidad de lograr esta importante meta profesional.*

Nuestra admiración y especiales agradecimientos a los autores de cuyos libros y artículos se han tomado sus brillantes ideas para argumentar y escribir una Tesis, como esta, de primera necesidad en la Educación Preuniversitaria Cubana.

A todos, Muchas Gracias

RESUMEN

El desarrollo del pensamiento geométrico espacial en los estudiantes de la educación preuniversitaria es un aspecto esencial para asimilar los contenidos matemáticos relacionados con la geometría del espacio y de esta forma, enfrentarse con éxito a la resolución de problemas geométricos de estereometría. Sin embargo, en este sentido, subsisten aún insuficiencias constatadas por el estudio exploratorio fáctico y causal, que permitió precisar el problema científico de la investigación, dado en ¿cómo contribuir al desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial en los estudiantes?

Por lo que se identifica como objeto de estudio: el proceso de enseñanza - aprendizaje de los contenidos matemáticos relacionados con la geometría del espacio. Este objeto permitió delimitar como campo de acción: el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial en los estudiantes de la educación preuniversitaria. El objetivo de la investigación es: Contribuir a elevar los niveles de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial en los estudiantes de la Educación Preuniversitaria Cubana del IPU “Mártires del Porvenir”.

Por ello, se precisa en la tesis, un sistema de habilidades del pensamiento geométrico espacial, se elabora una metodología contentiva de procedimientos desarrolladores, eslabones, componentes, acciones y orientaciones metodológicas, que permiten el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial de los estudiantes de la educación preuniversitaria.

La instrumentación parcial en la práctica a través de la aplicación de un pre-experimento y del método criterio de expertos, permitieron corroborar la viabilidad, pertinencia, factibilidad y consistencia teórica y práctica de la metodología, como contribución a la teoría de la Didáctica de la Matemática.

ABSTRACT

The development of spatial geometric thinking in students of pre-university education is an essential aspect to assimilate the mathematical contents related to the geometry of space and thus, successfully face the resolution of geometric problems of stereometry. However, in this sense, there are still inadequacies found by the factual and causal exploratory study, which allowed us to specify the scientific problem of the research, given in how to contribute to the development of spatial geometric thinking skills in students?

For what is identified as an object of study: the teaching process - learning of the mathematical contents related to the geometry of space. This object allowed to define as a field of action: the development of spatial geometric thinking skills in students of pre-university education. The objective of the research is: Contribute to raising the levels of development of spatial geometric thinking skills in the students of the Cuban Pre-University Education of the IPU "Mártires del Porvenir".

Therefore, the thesis, a system of spatial geometric thinking skills, a content methodology of developer procedures, links, components, actions and methodological orientations, which allow the development of the spatial geometric thinking skills of students is developed of pre-university education.

The partial instrumentation in practice through the application of a pre-experiment and the criterion of experts method, allowed to corroborate the feasibility, relevance, feasibility and theoretical and practical consistency of the methodology, as a contribution to the theory of Didactics of the Math.

ÍNDICE GENERAL

	Pág.
INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO 1. FUNDAMENTOS TEÓRICOS DEL DESARROLLO DE HABILIDADES DEL PENSAMIENTO GEOMÉTRICO ESPACIAL EN LA EDUCACIÓN REUNIVERSITARIA	12
1.1 Evolución histórica tendencial del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría del espacio en la educación preuniversitaria.....	12
1.2 Principales fundamentos teóricos del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría del espacio en la educación preuniversitaria.....	26
1.3 El desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial. Presupuestos teóricos esenciales.....	32
1.4 Diagnóstico del estado actual de desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial en la educación preuniversitaria	41
CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO 1	
CAPÍTULO 2. EL DESARROLLO DE HABILIDADES DEL PENSAMIENTO GEOMÉTRICO ESPACIAL. METODOLOGÍA PARA LA CONDUCCIÓN DE ESTE PROCESO POR LOS PROFESORES DE LA ENSEÑANZA PREUNIVERISTARIA	47
2.1 Fundamentos y referentes teóricos de la metodología para la conducción por los profesores del proceso de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial en estudiantes de preuniversitario.....	47
2.2 Sistema de habilidades del pensamiento geométrico espacial.....	51
2.3 Metodología para la conducción por los profesores de preuniversitario del proceso de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial.....	61
2.3.1 Procedimientos desarrolladores para conducir el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial.....	61
2.3.2 Eslabones y componentes de la metodología.....	65
CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO 2	85

CAPÍTULO 3. VALORACIÓN DE LA PERTINENCIA Y FACTIBILIDAD DE LA METODOLOGÍA PARA LA CONDUCCIÓN DEL PROCESO DE DESARROLLO DE LAS HABILIDADES DEL PENSAMIENTO GEOMÉTRICO ESPACIAL.....	86
3.1 Implementación parcial en la práctica de la metodología para la conducción por los profesores del proceso de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial.....	86
3.2. Valoración de la factibilidad y pertinencia de la metodología.....	95
3.2.1 Valoración de la implementación de la metodología, a través de un pre-experimento.....	95
3.2.2 Valoración de la factibilidad de la metodología mediante el método criterio de expertos.....	99
CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO 3.....	101
CONCLUSIONES GENERALES.....	102
RECOMENDACIONES.....	103
BIBLIOGRAFÍA	
ANEXOS	

INTRODUCCIÓN

La educación preuniversitaria en Cuba tiene como fin: “Lograr la formación integral del joven en su forma de sentir, pensar y actuar responsablemente en los contextos escuela-familia-comunidad, a partir del desarrollo de una cultura general integral...” (MINED, 2007), que se corresponde con los pilares básicos del aprendizaje: aprender a conocer, a hacer, a convivir y a ser (Delors, 1997), planteados por la UNESCO a la educación, de forma tal que esta contribuya a crear y desarrollar conocimientos, hábitos y habilidades en los seres humanos, para estar a la altura de la sociedad donde vive.

La geometría como rama de la Matemática que estudia “las formas de los objetos geométricos del espacio euclidiano y a las relaciones (axiomas, fórmulas, criterios, definiciones y teoremas) que las caracterizan cuantitativamente” (López, 1997, p. 42), está presente en la producción, el arte, la tecnología, en la naturaleza y juega un papel importante en la transformación de la realidad objetiva circundante.

Su enseñanza y aprendizaje en el contexto escolar favorece que los educandos se formen una concepción científica del mundo, adquieran una cultura integral y un pensamiento científico, que los prepare para la vida social y laboral para que mantengan una actitud responsable y comprometida ante los problemas de la sociedad, la ciencia y la tecnología.

En la actualidad, la enseñanza y el aprendizaje de esta ciencia en la educación preuniversitaria cubana se encuentra en constante perfeccionamiento, consecuencia de la introducción y desarrollo de las tecnologías de la información y la comunicación en el contexto escolar, dirigido a la búsqueda por vías científicas de métodos, técnicas, estrategias y medios de enseñanza-aprendizaje que sitúen al estudiante en el centro del aprendizaje, que promuevan su participación protagónica en la adquisición y aplicación de nuevos conocimientos, en la formación y desarrollo de hábitos y habilidades matemáticas.

Para ello, es importante que los estudiantes apliquen los conocimientos, hábitos y habilidades que adquieran con la resolución de problemas relacionados con la realidad objetiva y de esta forma, comprendan la utilidad y el carácter instrumental de los contenidos geométricos y puedan,

a través de estos, ponerse en contacto con los objetos del mundo real a fin de experimentar con ellos, descubrir propiedades y establecer relaciones.

Por las razones anteriores, la enseñanza-aprendizaje de la geometría, ocupa a numerosos investigadores de la Didáctica de la Matemática, demostrado por los trabajos presentados en los congresos internacionales de Matemática Educativa (ICME) y los congresos de la Sociedad Cubana de Matemática y Computación (COMPUMAT).

Como consecuencia del debate científico, ha emergido como una de las tendencias del quehacer matemático en las instituciones educativas, el desarrollo del pensamiento matemático de los educandos desde edades tempranas (Benítez y Cárdenas, 2008), que tiene como propósito fundamental la reorientación de las prácticas pedagógicas, de las actividades didácticas, metodológicas y de todo lo que acontece en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática hacia una enseñanza que se preocupe más por los procesos de pensamiento propios de esta ciencia y menos por los contenidos (Sánchez y Bonilla, 1998).

Uno de los componentes del pensamiento matemático es el pensamiento geométrico espacial (Benítez y Cárdenas, 2008; Ballester et al., 2007). Este tipo de pensamiento matemático "... se basa en el conocimiento del espacio físico tridimensional como reflejo generalizado y mediato de dicho espacio, el cual posee una fuerte base senso-perceptual,... contribuye a que el alumno se ubique espacialmente en el mundo mediante la identificación de representaciones bidimensionales y tridimensionales,... implica un análisis y una síntesis...; es además una abstracción y una generalización, derivada de ellos. De esta forma, los resultados del pensamiento geométrico espacial (conceptos, definiciones, propiedades, teoremas y fórmulas) se incorporan por sí mismos al proceso del pensar..., lo cual enriquece y desarrolla, elevándolo a otro nivel en complejidad. O sea, le permite al alumno llegar a generalizaciones cada vez más complejas a medida que descubre relaciones espaciales y conexiones más profundas". (Rojas, 2009, pp. 88-89)

En relación al estudio del pensamiento geométrico espacial, investigadores como Frostig (1978), Horne (1978), Hoffer (1967) (citados por Uribe et al., 2014), Fera et al. (2006) han aportado una

serie de habilidades que se pueden desarrollar en contextos geométricos, tales como: la coordinación visomotriz, la percepción figura-fondo, la constancia perceptual, la percepción de posición en el espacio, la percepción de las relaciones espaciales, la discriminación visual y la memoria visual. A pesar de los aportes realizados por estos autores aún subsisten dificultades en el desarrollo de estas habilidades en los educandos, derivadas de la enseñanza tradicional y poco desarrolladora de la Matemática en las instituciones escolares.

En el ámbito nacional se resaltan los trabajos de didactas de la matemática, tales como Escalona (1994), Ballester (1992, 2007), González D. (2006), García (2002), Campistrous y Rizo (1980-2007), Flores (1991), Barcia (2000), Acuña (2008), Hernández B. (2001) y Rojas (2006, 2007, 2009), entre otros.

Las principales aportaciones de los autores mencionados anteriormente han estado dirigidas en las siguientes direcciones:

- Propuestas de estructuración de cursos de Geometría del espacio, que contribuyen al desarrollo del pensamiento geométrico espacial y lógico deductivo, donde subyacen elementos del método axiomático acorde con la escuela cubana de la época, en los que se presta más atención a la enseñanza de los contenidos geométricos por parte del profesor, que al papel activo de los estudiantes en su construcción, en detrimento del desarrollo del pensamiento geométrico espacial en los estudiantes.
- Propuestas didácticas mediante las cuales se articula la enseñanza basada en problemas con el aprendizaje de la geometría del espacio, pero no se presta debida atención al desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial en los estudiantes.
- Propuestas didácticas para el empleo de medios más activos, mediante la introducción y uso de las tecnologías para la enseñanza-aprendizaje de la geometría, con un enfoque dinámico, dirigidas a la representación de figuras geométricas espaciales en un plano bidimensional para el desarrollo de la visualización, la percepción, la búsqueda de propiedades y relaciones, que aunque se consideran aspectos esenciales para el desarrollo del pensamiento geométrico

espacial, no se articulan en toda su magnitud con los procedimientos de los que debe apropiarse el estudiante para desarrollar habilidades propias de este tipo de pensamiento.

El análisis de lo anterior, corrobora que en el proceso de enseñanza–aprendizaje de la Matemática en Cuba, subsisten limitaciones didácticas para dirigir el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial de los educandos que llegan al último grado de la educación preuniversitaria e incluso, los que cursan la educación universitaria, sin tenerlas aprehendidas.

Lo antes expuesto se constató en un estudio exploratorio realizado por el autor de esta investigación en los cuatro institutos preuniversitarios del Municipio Diez de Octubre de La Habana, así como la valoración de los resultados de la prueba de ingreso a la educación superior(2016, 2017), las regularidades de las visitas especializadas y de control por las direcciones municipal y provincial de Educación en La Habana y los resultados de los exámenes provinciales al duodécimo grado, efectuados en los años 2016 y 2017.

El estudio exploratorio determinó problemáticas relacionadas con el desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial, al constatar que los estudiantes tienen dificultades para identificar las figuras planas y cuerpos geométricos, sus propiedades y conceptos, establecer relaciones lógicas entre esas propiedades, reconocer las relaciones existentes entre esas figuras y cuerpos geométricos, así como su representación mediante su esbozo geométrico, calcular el área y volumen de cuerpos, valorar la utilidad y repercusión sociocultural de las representaciones geométricas, aplicar adecuadamente los teoremas de la planimetría y la estereometría, deducir con claridad las consecuencias entre las informaciones que se dan en los datos del ejercicio o problema, y para establecer un ordenamiento lógico de las respuestas.

Al analizar las dificultades señaladas se reconoce que no existe una metodología que oriente cómo dar tratamiento al desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial en los estudiantes, además de que no se aborda de manera explícita en los programas y orientaciones metodológicas de preuniversitario.

Por otro lado, es insuficiente el desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial en los estudiantes, ya que no constituye una prioridad en las preparaciones metodológicas a nivel de provincia, municipio o en las escuelas el desarrollo de estas habilidades.

Ello, es resultado de la contradicción existente entre la necesidad de resolver ejercicios y problemas relacionados con la geometría del espacio para una mejor comprensión y transformación de su realidad circundante, así como para la formación de su concepción científica del mundo y el insuficiente desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial en los estudiantes de preuniversitario.

Los argumentos expuestos con anterioridad, sirven de base para plantear como **problema científico** de esta investigación: ¿cómo contribuir al desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial en el proceso de enseñanza - aprendizaje de la asignatura Matemática en la educación preuniversitaria?

Respuesta anticipada al problema de investigación:

Idea científica a defender, determinada en:

La implementación de una metodología para el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial en los estudiantes de la educación preuniversitaria, sustentada en el enfoque desarrollador del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, puede contribuir a elevar los niveles de desarrollo de estas habilidades para resolver las dificultades existentes en el proceso de resolución de problemas de la geometría del espacio en los estudiantes del IPU “Mártires del Porvenir”.

Tipos de investigación:

Por su **carácter o finalidad**: Aplicada. Como punto de partida, el IPU “Mártires del Porvenir”, contexto donde se realizó la investigación, se profundiza en el perfeccionamiento del proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio de la asignatura Matemática de la educación preuniversitaria cubana en la referida institución y concretándose las acciones encaminadas a

solucionar la problemática existente a partir de la validación de los aportes tanto teóricos como prácticos del proceso investigativo.

Por su **estudio**: Interventiva. Se asumió el enfoque desarrollador del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática como base teórico-metodológica y en correspondencia con los objetivos del perfeccionamiento continuo del proceso de enseñanza-aprendizaje que se realiza en la educación preuniversitaria cubana; se realizó la concreción práctica de la investigación en el IPU “Mártires del Porvenir”; lo que permitió elaborar una metodología para la conducción por los profesores de esta educación del proceso de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial.

Por la naturaleza de la información que se recoge: Mixta (Cuantitativa y Cualitativa).

Variables Fundamentales de la Investigación

Variable independiente: La implementación de una metodología para el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial en los estudiantes de la educación preuniversitaria, sustentada en el enfoque desarrollador del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática.

Variable dependiente: Los niveles de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial en los estudiantes del IPU “Mártires del Porvenir”

Objetivos de la investigación:

Objetivo General:

Contribuir a elevar los niveles de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial en los estudiantes de la Educación Preuniversitaria Cubana del IPU “Mártires del Porvenir”.

Objetivos Específicos:

- Sistematizar los referentes teórico-metodológicos que sustentan el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio en la educación preuniversitaria.

- Caracterizar el estado actual del desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio en el IPU “Mártires del Porvenir”.
- Determinar los eslabones, componentes y procedimientos que deben caracterizar a la metodología para el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría del espacio en el IPU “Mártires del Porvenir”, desde un enfoque desarrollador.
- Valorar de la factibilidad de la metodología elaborada en la elevación de los niveles de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio en el IPU “Mártires del Porvenir”.

Objeto de estudio

El proceso de enseñanza - aprendizaje de los contenidos matemáticos relacionados con la Geometría del Espacio de la asignatura Matemática en la educación preuniversitaria.

Campo de Acción

El desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial en los estudiantes de la educación preuniversitaria.

Diseño metodológico de la investigación

Métodos de nivel teórico

- ❖ Analítico-Sintético: se utilizó durante el proceso de investigación para el análisis de los principales presupuestos teóricos que fundamentan el proceso de enseñanza-aprendizaje de los contenidos matemáticos relacionados con la geometría del espacio en la educación preuniversitaria, así como el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial en los estudiantes en dicho proceso.
- ❖ Histórico lógico para el análisis de la evolución histórica de la enseñanza de la geometría en Cuba.
- ❖ Modelación y el enfoque de sistema se utilizan en la elaboración de la metodología.

- ❖ Inducción-deducción: para la realización de la sistematización teórica del objeto de estudio y campo de acción de la investigación, a partir del estudio de las diferentes fuentes bibliográficas relacionadas con el proceso de desarrollo del pensamiento geométrico espacial y las habilidades inherentes al mismo. Además, se utiliza para interpretar y generalizar los resultados de los instrumentos aplicados y realizar valoraciones, así como para llegar a conclusiones.
- ❖ Hipotético-deductivo: desempeñó un papel esencial en la verificación de los resultados alcanzados en el nivel de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial de los estudiantes del duodécimo grado de la educación preuniversitaria, a partir de la implementación parcial de la metodología en un tema de la asignatura Matemática.

Métodos de nivel empírico

- ❖ Análisis documental: para el estudio de programas, libros de texto, orientaciones metodológicas y de las tendencias actuales en el desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial, lo que permitió la interpretación y análisis de los fundamentos teóricos y el enriquecimiento del diagnóstico.
- ❖ Pre-experimento pedagógico: para evaluar la factibilidad de la metodología para la conducción del proceso de desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial, en las condiciones actuales de la educación preuniversitaria.
- ❖ Observación a clases y a actividades metodológicas: para diagnosticar el tratamiento metodológico dado por los profesores de matemática al desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial.
- ❖ Encuesta a profesores: para determinar los criterios y puntos de vista acerca del problema de investigación.
- ❖ Pruebas pedagógicas: para comprobar el nivel de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial en los estudiantes de duodécimo grado, antes y después de la aplicación de la metodología.

- ❖ Criterio de expertos: para obtener las valoraciones acerca de la pertinencia de la metodología para el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial y su factibilidad en la práctica.
- ❖ Entrevista a metodólogos municipales y provinciales de Matemática de la educación preuniversitaria para constatar el estado actual de la preparación de los profesores para dirigir el proceso de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial.

Métodos de nivel estadístico-matemático

Los métodos estadísticos se utilizan para el procesamiento de la información obtenida de la aplicación de los métodos y técnicas del nivel empírico. Los más empleados son: la confección de tablas, el cálculo de medidas de tendencia central (media), el cálculo de la frecuencia absoluta y relativa, el cálculo del coeficiente de competencia de expertos (k) y el método de Green que permitió determinar los puntos de corte en el procesamiento Delphi. Además, se aplica la prueba de signos de Wilcoxon para el análisis de la transformación observada entre estado inicial y el estado final del pre-experimento.

Diseño muestral

En la tesis se toma como población los 603 estudiantes y los 10 profesores de Matemática del preuniversitario “Mártires del Porvenir” del municipio Diez de Octubre, de la provincia La Habana y como muestra, el 30% del total de estudiantes de cada grado, lo que equivale a 68 estudiantes de décimo grado, 48 de onceno y 65 de duodécimo grado, y los 10 profesores del centro.

Justificación de la investigación.

Actualidad.

A medida que la Didáctica de la Matemática ha ido evolucionando en sus objetivos, contenidos y métodos, su base teórico-metodológica ha evolucionado desde una didáctica donde el centro del proceso de enseñanza-aprendizaje fue el profesor, hacia a una didáctica donde el protagonista y sujeto principal del aprendizaje es el estudiante y en la que el papel del profesor es de facilitador

de ese aprendizaje. el enfoque desarrollador de la enseñanza y el aprendizaje teórico-metodológico ha venido ganando espacio en la escuela cubana.

En la actualidad se realizan aportes importantes en cuanto a las propuestas de procedimientos desarrolladores que contribuyan a estimular el pensamiento de los estudiantes en el proceso de aprendizaje, los cuales precisan ser contextualizados a cada una de las asignaturas que se imparten en la educación preuniversitaria cubana.

En este sentido, se han realizado investigaciones dirigidas a lograr que el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática adquiera ese carácter desarrollador, como se demuestra en la enseñanza del Álgebra y la Aritmética, no así en la Geometría.

Por todo lo anterior, la presente investigación aborda un tema de gran actualidad referido al desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial, que se sustenta en el enfoque desarrollador del proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio en la educación preuniversitaria.

Factibilidad.

El autor de la presente investigación obtuvo los recursos y autorizaciones necesarias de la dirección del IPU “Mártires del Porvenir” para realizar la presente investigación. Además, cuenta con los conocimientos teóricos y metodológicos de la Didáctica de la Matemática para ofrecer ayuda metodológica a los profesores de la institución para materializar la metodología propuesta.

Novedad científica.

Consiste en que se enriquece la teoría de la Didáctica de la Matemática al sistematizarse el enfoque desarrollador del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría del espacio con procedimientos desarrolladores para el tratamiento de las habilidades del pensamiento geométrico espacial.

Aportes: teórico y práctico.

- La determinación de un sistema de habilidades del pensamiento geométrico espacial, a partir de los niveles del pensamiento geométrico de Van Hiele.

- La propuesta de una metodología para la conducción por los profesores del proceso de desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial, contentiva de procedimientos desarrolladores, eslabones, así como componentes y orientaciones metodológicas.
- Explicación del proceso de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial como sistema en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura Matemática en la educación preuniversitaria.

Resultados esperados.

Se ofrecen orientaciones metodológicas a los profesores que les permite conducir el proceso de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial, a través de los contenidos matemáticos, relacionados con la geometría del espacio, con vistas a elevar los niveles de desarrollo en los estudiantes de la educación preuniversitaria.

CAPÍTULO 1.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS DEL DESARROLLO DE HABILIDADES DEL PENSAMIENTO GEOMÉTRICO ESPACIAL EN LA EDUCACIÓN PREUNIVERSITARIA

INTRODUCCIÓN

En este capítulo, se realiza un análisis de la evolución histórica de la enseñanza de la geometría en Cuba, se determina los fundamentos teóricos del proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio en la asignatura Matemática de la educación preuniversitaria, desde la mirada del enfoque desarrollador, como una de las tendencias didácticas actuales que tiene como propósito fundamental que los profesores de Matemática empleen métodos de enseñanza productivos, que propicien que los estudiantes sean sujetos activos y no pasivos de su propio aprendizaje.

Se precisa, además, los presupuestos teóricos del proceso de desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial en la enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio y, por último, se presentan los resultados del diagnóstico de la situación actual del desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial en el duodécimo grado de la educación preuniversitaria en el municipio Diez de Octubre de La Habana, que justifican y argumentan el problema científico de la investigación.

1.1 Evolución histórica tendencial del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría del espacio en la educación preuniversitaria

El valor de la enseñanza-aprendizaje de la Matemática, y con ella los contenidos geométricos, para la formación de las nuevas generaciones, es reconocido por filósofos, sociólogos, psicólogos, pedagogos y didactas, por lo que se realizan múltiples investigaciones relacionadas con esta área del conocimiento. Seguir la trayectoria que ha tenido un objeto de esta complejidad, implica adentrarse en su contexto matemático para determinar el recorrido

epistémico y qué camino seguir para contribuir a mejorar el proceso de enseñanza aprendizaje de los contenidos de la geometría del espacio en la educación preuniversitaria.

Para lograr tales propósitos, se realizó un estudio histórico tendencial del proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática en la educación preuniversitaria en Cuba, que permitió determinar las etapas a partir del comportamiento de determinados indicadores, lo que facilitó profundizar en las particularidades teórico-prácticas del proceso en general y, en particular, lo relacionado con la geometría del espacio.

El punto de partida del análisis histórico se toma desde el año 1975 al considerar el estudio realizado por Torres, P. (1993), donde señala que en la primera década después del triunfo de la Revolución, la enseñanza de la Matemática estaba completamente al margen del desarrollo de la ciencia matemática y de la renovación de los planes de estudio que se habían iniciado en casi todo el mundo.

Esta idea se corrobora en los documentos normativos y metodológicos del Seminario Nacional a dirigentes de febrero de 1980 en los que se plantea que “Los programas de Matemática vigentes al triunfo de la Revolución no estaban actualizados pues durante varias décadas se venían aplicando [...], eran el reflejo de programas practicistas que habían estado en boga en otros países, en especial los Estados Unidos, durante épocas anteriores” MINED (1980, p.48).

En el año 1975 se inicia el perfeccionamiento del Sistema Nacional de Educación, debido a la necesidad de producir un salto cualitativo, y como consecuencia de investigaciones realizadas en el campo de la Didáctica, se producen profundos cambios en la planificación y organización de planes de estudio.

Por ello, el análisis histórico abarca el período de 1975–2018, al tener en cuenta que antes de 1975 se abordaban los contenidos con las concepciones tradicionales, según los programas vigentes al triunfo de la Revolución cubana.

Los indicadores utilizados para el análisis histórico tendencial son:

- Enfoques metodológicos de los contenidos de la geometría del espacio en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática en el preuniversitario.

- Posición que ocupaban el estudiante y el profesor en el proceso de enseñanza-aprendizaje.
- Exigencias de los programas sobre los contenidos de la geometría del espacio.

El comportamiento de estos indicadores en el período estudiado, permitió determinar tres etapas. La primera etapa abarca desde el año 1975 al 1989 denominada: La geometría como línea directriz. La delimitación de la segunda etapa se enmarca desde 1990 hasta 1999, llamada: Renovación de los contenidos de geometría del espacio. La tercera etapa, corresponde a los años 2000-2018, nombrada: Actualización de la concepción de la geometría del espacio.

Para el estudio histórico tendencial se tiene en cuenta como referentes, los documentos que emitidos por el Ministerio de Educación, como resoluciones, programas, orientaciones metodológicas y libros de textos, relacionados con el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en el preuniversitario, así como las investigaciones que se desarrollaron en Cuba y otros países con significativos avances en el campo de la educación.

A continuación se caracterizan cada una de estas etapas, para finalmente formular las tendencias históricas de la geometría del espacio en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática en la educación preuniversitaria.

Primera etapa (1975-1989): La geometría como línea directriz

Después del triunfo de la Revolución se inició un proceso de transformaciones en la educación cubana tanto en la estructura organizativa como en sus objetivos, contenidos y métodos, esto condujo a cambios iniciales que fueron implantados a partir de 1961, y aunque en relación con los contenidos no representaban grandes reformas, sí sentaron las bases para transformaciones de mayor relevancia.

En el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría se mantuvieron los preceptos de la profesora Dulce María Escalona (1944), quien declaró como objetivos de la enseñanza y el aprendizaje de la geometría: el dominio de los teoremas esenciales y de sus aplicaciones prácticas; la comprensión clara de la naturaleza de la prueba geométrica y del significado del rigor matemático; la creación de hábitos para la organización lógica de las ideas; la transferencia de los hábitos adquiridos a situaciones no geométricas, de modo que el alumno adquiriera la

capacidad del pensamiento cuidadoso e independiente. Estas ideas, planteadas por la autora, se adelantaron a la época, la cual estaba marcada por una enseñanza tradicional que no propiciaba su concreción en la práctica educativa.

En esta etapa fueron elaborados nuevos programas para el estudio de la Matemática en el preuniversitario con el asesoramiento de especialistas alemanes, según refiere Torres, P. (2000), y se introdujeron las primeras ideas sistematizadas acerca de la didáctica especial a través de la asignatura Metodología de la Enseñanza de la Matemática.

Con la introducción del plan alemán en el preuniversitario, fueron eliminados algunos contenidos y dentro de ellos, se encontraba la geometría sintética del espacio (Estereometría, I parte), y se se pierde la posibilidad de resolver muchos problemas geométricos clásicos de interés para la enseñanza.

El trabajo metodológico en la escuela, estuvo dirigido al aprendizaje del contenido de los programas y al análisis de algunos aspectos metodológicos específicos de acuerdo a los sistemas de conocimientos, lo que surgió como consecuencia de la elevación del nivel de profundización del contenido del nuevo programa y la incorporación creciente y heterogénea de profesores a la enseñanza de la asignatura, Feria, F. (2005); Ruiz, A. M. (2007).

En las orientaciones metodológicas, se profundiza en los métodos y procedimientos que fueron propuestos en los textos de Metodología, donde se explica la enseñanza o la instrucción heurística. Se expone en estos textos, cómo aplicar el Programa Heurístico General y, en general, los recursos heurísticos, que constituyen para el profesor un instrumento universal de dirección y para el estudiante una base de orientación para el aprendizaje, en particular, para el trabajo con los problemas.

Para el tratamiento a las situaciones típicas, fueron definidas como aquellas situaciones reales en la enseñanza de una asignatura, que poseen semejanza con respecto a determinados parámetros esenciales, se orientó además, la aplicación del Programa Heurístico General. Las situaciones típicas poseen un proceder similar a la aplicación de una estrategia de conducción y de los procedimientos metodológico-organizativos.

El contenido se estructuró a través de las líneas directrices que se definieron como “agrupamiento de la materia de enseñanza por aspectos principales referidos a la transmisión de conocimientos, el desarrollo de capacidades y la formación de convicciones a partir de los objetivos de la formación general” Ballester, S. (2002, p.3).

Internacionalmente se aprecia una tendencia a enfocar el aprendizaje de la matemática a través de la resolución de problemas, en este aspecto, se destacan los trabajos de Polya, G. (1976), De Guzmán, M. (1983), Brousseau, G. (1986) y Müller, H. (1988); ya que a inicios de esta etapa, son asumidas las ideas contenidas en libro de George Polya How to solve it? que se centró esencialmente en la aplicación de procesos heurísticos generales en la resolución de problemas.

Estas ideas se convierten desde entonces en un punto de referencia imprescindible para todo trabajo sobre el tema y fueron introducidas a partir de esta etapa, en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en Cuba.

Con ello se trató de dar respuesta a las insuficiencias que en el aprendizaje de esta asignatura se presentaban, al considerar “[...] que no era suficiente el énfasis en los ejercicios y en la repetición, en el dominio de los algoritmos y las operaciones básicas, pues los estudiantes tenían que ser capaces de resolver problemas complejos [...]” Torres, P. (1998, p.35).

Este tipo de instrucción heurística potenciaba el papel orientador del profesor, pero en la práctica, en las clases predominaba la enseñanza tradicional y aunque con esta forma de enseñanza el estudiante debía alcanzar mayor independencia, este avance fue aún insuficiente.

En el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática se manifestaba el carácter pasivo de los estudiantes, Fera, F. (2005); Gamboa, M. (2007), pues aunque se reconocía la importancia del papel protagónico de estos en el proceso, eran escasas todavía las actividades que promovieran la reflexión y la participación activa, lo que favoreció el aprendizaje fragmentado y reproductivo. En particular en la geometría se representaban figuras o cuerpos mediante láminas o graficas mayoritariamente utilizadas por el profesor, lo que no les permitía a los estudiantes interactuar y se dificultaba su visualización (Fernández, 2016).

Ello conllevó a que no se desarrollaran de forma eficiente las habilidades matemáticas y del

pensamiento lógico deductivo, relacionadas con el contenido de la geometría del espacio, que potenciaran en los estudiantes, el pensamiento geométrico espacial, lo que condujo a serias deficiencias y dificultades en estos para resolver problemas geométricos.

En los textos de Metodología de la Enseñanza de la Matemática de Jungk, W. (1981); Zillmer, W. (1981); Müller, H. (1987), y en el Proyecto Matemática elaborado por el MINED, se enfatizó, en las funciones de la enseñanza de esta asignatura: “Proveer a los estudiantes de sólidos conocimientos acerca de aquellos conceptos, teoremas, reglas, relaciones y procedimientos que poseen una importancia relativamente general y que desde el punto de vista histórico son estables.” MINED, (1987, p.3).

En el curso 1986-1987 se hace necesario realizar ajustes en los programas vigentes a fin de dar mayores posibilidades a profesores y estudiantes en la realización del proceso de enseñanza-aprendizaje; permitir que se trabaje con el tiempo requerido en la atención a las deficiencias que presentan los estudiantes; garantizar la asimilación de los conocimientos esenciales en cada grado.

En esta etapa, además de los conceptos, teoremas y sus demostraciones, así como los procedimientos de solución, se estudiaban como situaciones típicas, la fijación de los conocimientos matemáticos, el control y valoración de los rendimientos de los estudiantes, entre otras.

Las exigencias en los programas planteaban la reproducción de las definiciones, proposiciones y demostraciones, lo que provocó que en muchas ocasiones los estudiantes fueran repetidores de conocimientos y razonamientos sin comprenderlos, limitando el desarrollo de habilidades. (Fernández, 2016). Estas limitaciones incidieron de manera negativa en el aprendizaje de la Geometría del espacio en el desarrollo de habilidades para resolver problemas geométricos, puesto que los estudiantes confrontaron dificultades para analizar un problema en cuestión, utilizar reglas y estrategias heurísticas para encontrar la vía de solución, identificar figuras geométricas, extraer información de los datos y deducir consecuencias.

El programa establecido se reducía a algunas nociones de geometría descriptiva, al cálculo de

cuerpos y al estudio de la geometría analítica de la recta y el plano con enfoque vectorial.

En la década de los 80 se producen nuevos cambios en los planes y programas de Matemática; estas transformaciones tienen un carácter más autóctono, sobre la base del análisis de la práctica anterior y una mayor adecuación al contexto cubano. En esta etapa es donde surge la línea directriz geometría. Esta línea se desarrolla desde la Educación Preescolar, transitando por la Primaria, la Secundaria Básica hasta concluir en la Preuniversitaria.

Por la sistematicidad, continuidad y exigencias superiores del contenido geométrico en las diferentes educaciones, la geometría y en particular la del espacio es empleada como vehículo apropiado para interpretar el mundo físico y como herramienta para la orientación en el espacio. A pesar de estos avances continuaron las deficiencias en el desarrollo de habilidades para resolver problemas de carácter geométrico.

En resumen, el comportamiento, de los indicadores, a lo largo del tiempo en esta etapa se caracterizó por un enfoque metodológico del aprendizaje de los conocimientos matemáticos en el que el Programa Heurístico General se introduce en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática y se enfatiza en su aplicación para la resolución de problemas, que no tuvo el éxito esperado en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en general y de la Geometría, en particular, por el bajo nivel en el desarrollo de habilidades matemáticas en los estudiantes.

Se pretendió transformar la posición pasiva que ocupaba el estudiante en el proceso de enseñanza-aprendizaje, a partir de la enseñanza heurística, en la que el profesor ocupara un lugar menos protagónico y prevaleciera más la orientación, sin embargo, no se lograron alcanzar dichos propósitos.

Las exigencias en los programas se redujeron a nociones de geometría descriptiva, al cálculo de cuerpos y al estudio de la geometría analítica de la recta y el plano con enfoque vectorial. Para ello, se utilizaba la representación gráfica como apoyo al cálculo y al desarrollo de su capacidad de imaginación espacial, que no resultó suficiente para el desarrollo del pensamiento geométrico espacial en los estudiantes.

Segunda Etapa (1990-1999): Renovación de los contenidos geometría del espacio

En esta década se desarrolla un profundo trabajo de los investigadores cubanos para crear una didáctica en correspondencia con el contexto del país, la que se recoge en la obra Metodología de la enseñanza de la Matemática, que es uno de los textos de obligada consulta para el desarrollo del proceso de enseñanza- aprendizaje de esta asignatura en el nivel medio y medio superior.

Se estudia en esta etapa el tratamiento a los métodos y procedimientos a partir de las situaciones típicas de la enseñanza de la Matemática con un marcado enfoque problémico, sin que se caracterizara explícitamente, pretendiendo aproximarse a la enseñanza problémica de la asignatura, pero su aplicación en la práctica fue limitada, aspectos reconocidos entre otros autores como Torres, P. (1993) y Cruz, M. (2002).

Se reelaboran nuevos libros de textos en los que aparece estructurado el contenido en concordancia con las unidades de los programas y las orientaciones metodológicas para cada grado del preuniversitario, en ellas se ofrecen ideas de, cómo el profesor debe planificar el proceso de enseñanza-aprendizaje en cada unidad de estudio. Las orientaciones metodológicas y libros de textos tienen en cuenta la realidad cubana, así como las características del personal docente y de los alumnos. Prevalece el enfoque de resolver problemas de naturaleza geométrica con situaciones de la vida cotidiana y de diferentes ciencias que requieren representar figuras.

No obstante, en el plano teórico y metodológico, aun es imprescindible perfeccionar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura Matemática en el preuniversitario en torno a la modificación sustancial del papel del profesor, que se mantuvo como centro del proceso, al transmitir el sistema de conocimientos y el estudiante, que aunque tuvo una mayor participación, todavía manifestaba dependencia en el aprendizaje. Fera, F. (2005); Ruiz, A. M (2007).

En los programas vigentes hasta el curso 1991 –1992 el estudio de la geometría del espacio se redujo al de algunas nociones de Geometría Descriptiva, al cálculo de cuerpos y al estudio de la Geometría Analítica de la recta y el plano con enfoque vectorial. En este programa se mantiene el estudio de la Geometría Analítica, pero con diferente enfoque, pues se trata la recta y el plano, fundamentalmente, de forma cartesiana. El cálculo de cuerpos se mantiene a través de toda la

unidad. Al igual que en la etapa anterior, fue limitado el desarrollo de habilidades que estimularan el tratamiento del pensamiento geométrico espacial en los estudiantes, pues las actividades de aprendizaje estaban dirigidas más a la memorización y a la repetición de conocimientos, que a la aplicación en la resolución de problemas geométricos.

En ese curso, se actualizan algunos conocimientos geométricos fundamentales que permiten dar continuidad al estudio de la geometría. En décimo grado, se incluye otro aspecto geométrico en la resolución de problemas de cálculos de cuerpos, en los que se aplica la trigonometría, se realizan problemas, donde se hace necesario utilizar los conocimientos trigonométricos.

En el curso 1991-1992, con el cambio de los programas, se concluye el estudio de la Geometría en la enseñanza general, en ella se estudian algunos principios fundamentales de la Geometría del Espacio o Estereometría, que permiten continuar desarrollando en el alumno su visión espacial y lo ayudan a una mejor interpretación del mundo que lo rodea, aspecto que comienza a trabajarse en el proceso de enseñanza-aprendizaje para favorecer el desarrollo del pensamiento geométrico espacial en los estudiantes.

A partir del año 1992, se introduce en el preuniversitario la geometría del espacio con las concepciones actuales.

En el curso 1993-1994, se realizan transformaciones en la educación media general para lograr mejores resultados en la formación integral de los estudiantes. En este, se han declarado algunos contenidos de forma opcional. Los contenidos referentes al cálculo de cuerpos y áreas, así como sus aplicaciones en décimo grado, se pueden desarrollar con carácter opcional, por lo que los estudiantes, cuando llegan al duodécimo grado, no han trabajado en el preuniversitario con el cálculo de cuerpos. En la unidad temática “geometría sintética” el punto esencial “cálculo geométrico con planos” podrá tratarse con carácter opcional en duodécimo grado. La unidad temática Geometría Analítica del Espacio se elimina del programa. Estos aspectos no favorecieron el desarrollo de habilidades para la resolución de problemas de la geometría del espacio, lo que fue en detrimento del desarrollo del pensamiento geométrico espacial de los estudiantes.

Esta etapa, se caracterizó por la introducción de enfoques metodológicos del aprendizaje de los conocimientos matemáticos a partir de los resultados de investigadores cubanos en el campo de la Didáctica de la Matemática, con una marcada intencionalidad problémica.

En cuanto a la posición que ocupan el estudiante y el profesor en el proceso de enseñanza-aprendizaje, se pretendió que el estudiante desempeñara un papel, en el que se aprecia matices propios de un proceso activo en el aprendizaje, aunque insuficiente para las exigencias de las transformaciones introducidas. El profesor se mantuvo como centro del proceso, y sin disponer de los suficientes recursos metodológicos para propiciar el desarrollo del pensamiento geométrico espacial.

En el programa se exigió en la unidad Geometría del Espacio, la sistematización de las nociones sobre el espacio y contribuir al desarrollo del pensamiento geométrico espacial en los estudiantes para la comprensión del espacio físico en que se modelan todas estas propiedades y se relacionan con los cuerpos geométricos estudiados, aspecto que al igual que en la etapa anterior, no se logró con el resultado esperado.

Tercera Etapa (2000-2018): Actualización de la concepción de la geometría del Espacio

A partir del curso escolar 2004-2005 comienza un proceso progresivo de transformaciones en la educación preuniversitaria, que inciden en la concepción actual de la enseñanza de la geometría del espacio. La concepción curricular que rige este modelo, satisface ideas esenciales, encaminadas a transitar a un proceso de diversificación en el duodécimo grado, que constituye una especialización en cuatro ramas, según los grupos de carreras universitarias por las que opta el alumno.

De manera particular, el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio, se desarrolla fundamentalmente mediante el uso de las tecnologías (videos clases, computadora). El empleo en las clases de las TIC y los medios computacionales ofrecen potencialidades y posibilidades incalculables para el trabajo en el aula, al brindar la oportunidad para observar, medir, conjeturar, comparar, imaginar, crear, generalizar y deducir sobre las figuras geométricas,

habilidades importantes para estimular el desarrollo del pensamiento geométrico espacial en los estudiantes.

A partir del desarrollo tecnológico del período, el uso de medios audiovisuales y software educativo, propicia una participación más consciente del estudiante en el aprendizaje de los contenidos geométricos.

También en esta etapa, se enfatiza en la labor del profesor en la dirección del aprendizaje y en las potencialidades que él posee para el desarrollo integral de la personalidad del estudiante, por lo que se hace indispensable garantizar un papel activo y reflexivo en la búsqueda de los conocimientos. Mederos, O. (2002), Cruz, M. (2002).

El estudiante se concibe como el protagonista principal en el proceso de aprendizaje, como máximo responsable de su formación, con una participación activa e independiente, sin embargo, la didáctica aplicada es inapropiada para concretar estos propósitos y en la práctica la introducción de las video-clases, como elemento fundamental para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje, limitó la comunicación entre el profesor y el estudiante, así como la concreción de los objetivos, lo que fue en detrimento del desarrollo de habilidades para la resolución de problemas.

En este nivel, los alumnos deben lograr mayor formalización y rigor en la asimilación de los contenidos geométricos, mediante procedimientos lógicos asociados a conceptos, juicios y razonamientos, con un nivel más elevado del pensamiento, lo que no se ha logrado de manera satisfactoria por el bajo nivel de desarrollo de habilidades para resolver de problemas geométricos que traen de enseñanzas anteriores.

En los programas elaborados para esta etapa, los objetivos generales del nivel, así como los específicos de cada grado, señalan que se debe potenciar el uso de técnicas y estrategias de trabajo, lo que se precisa en las orientaciones metodológicas al referir: “Es importante que ellos aprendan a determinar los conocimientos y habilidades particulares y los modos y estrategias generales de pensamiento que les han sido útiles en la resolución de un ejercicio y/o problema dado” MINED (2005, p.12).

La enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio en el preuniversitario actual, está inmersa dentro de este proceso y debe dirigirse al logro de estos cambios. Uno de estos cambios consiste en propiciar la reflexión, la comprensión conceptual junto a la búsqueda de significados, el análisis de qué métodos son mejores y más adecuados de forma tal que den posibilidades a que los estudiantes elaboren y expliquen sus propios procedimientos.

Prevalece la exposición de los contenidos estereogeométricos por la vía inductivo-deductiva, que no siempre es explotada en toda su magnitud para propiciar el desarrollo del pensamiento geométrico espacial de los estudiantes al sobredimensionarse el tratamiento formal de estos.

En el currículo existe una sistematización de la geometría, pero es necesario destacar que se le dedican muy pocas horas clases al cálculo de cuerpos en la educación media básica y en todos los niveles este contenido es la última unidad del programa, que es considerado esencial para el desarrollo del pensamiento geométrico espacial de los estudiantes.

En esta última etapa se logra una caracterización de la concepción actual del tratamiento de la geometría del espacio en la educación preuniversitaria, a partir de los resultados presentados por Campistrous (1989), Flores (1991), concretados en los programas, libros de texto y orientaciones metodológicas, que permiten precisar los elementos que en este orden, constituyen antecedentes a la conformación del currículo actual.

La geometría del espacio en este nivel, se basa en la axiomática de Hilbert (1899). Se plantean las nociones básicas de un sistema de axiomas para la construcción de la geometría del espacio, en el cual se incluyen algunas propiedades que en una caracterización axiomática serían axiomas, tales como la caracterización de planos, los cuales constituyen axiomas de incidencias donde debe lograrse una representación mental clara de ellos; se ilustran y analizan de forma tal que los alumnos comprendan que representan propiedades del espacio físico. Implícitamente los alumnos deben asumir el papel fundamental de las demostraciones, como una vía de aseguramiento cognitivo y reconocer la necesidad de admitir proposiciones sin demostración, como ocurre con los axiomas. Con la geometría del espacio se continúa el desarrollo de la visión espacial y se contribuye a lograr una mejor interpretación del mundo físico. Este programa

constituye un salto cualitativo con relación a los programas de estudios anteriores. De forma general, entre las habilidades geométricas a lograr están: estimar y calcular longitudes, áreas y volúmenes, así como resolver problemas relacionados con hechos y fenómenos sociales, científicos y naturales. Además, representar situaciones de la práctica, la ciencia o la técnica mediante modelos analíticos y gráficos y viceversa, extraer conclusiones a partir de esos modelos acerca de las propiedades y relaciones que se cumplen en el sistema estudiado, donde se apliquen para ello los conceptos, relaciones y procedimientos relativos al trabajo geométrico espacial.

En este programa, se concibe la formación y desarrollo de capacidades para percibir, imaginarse y representar mental y gráficamente figuras y cuerpos, así como las relaciones entre ellas. También se concibe el desarrollo de las capacidades lógico-verbales en correspondencia a la terminología y simbología de la geometría del espacio.

La enseñanza de la geometría del espacio en el preuniversitario considera su tratamiento de forma racional, pues se realiza el estudio de los conceptos y relaciones geométricas espaciales, al concebir el trabajo geométrico a un mayor nivel de abstracción y generalización, donde se toma como base las relaciones que se dan en el mundo material y en modelos que lo representan, para regresar a la práctica con las aplicaciones de lo aprendido.

Los contenidos geométricos espaciales juegan un rol importante en la formación general del bachiller, pues están dirigidos al desarrollo de un sentido geométrico del pensamiento lógico y abstracto, a desarrollar la imaginación y un pensamiento geométrico espacial que le permita al alumno representar, orientarse y entender o describir el medio que le rodea.

Las características fundamentales de la etapa, se refieren al proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio, favorecido por uso de las tecnologías, que propician la visualización de figuras, conceptos, teoremas y cuerpos geométricos, pero las insuficiencias en su tratamiento didáctico no han favorecido alcanzar los objetivos planteados en cuanto al desarrollo del pensamiento geométrico espacial de los estudiantes, al continuar confrontándose en estos insuficiencias para resolver problemas de la estereometría.

Continuó elevándose las exigencias del papel del estudiante de modo que su actuación protagónica contribuye a que estos vayan conformando de forma individual, con la intervención colectiva, el procedimiento generalizado para resolver estos problemas, guiados por las orientaciones del profesor.

En los programas aplicados en la etapa se elevaron las exigencias en cuanto a la formación y desarrollo de capacidades y habilidades para imaginarse y representar mental y gráficamente figuras y cuerpos, así como las relaciones entre ellas, se tuvieron en cuenta también las capacidades lógico-verbales de la terminología y simbología de la geometría del espacio.

Sin embargo, las estrategias de enseñanza utilizadas por los profesores, continúan siendo insuficientes para que los estudiantes construyan estrategias de trabajo y de aprendizaje que le permitan tener éxito en el proceso de resolución de problemas relacionados con la geometría del espacio.

Como resultado del estudio histórico realizado, se determinaron las siguientes tendencias:

- Los enfoques metodológicos en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática en el preuniversitario pasaron de un inicio con influencia extranjera, donde hubo reducción de algunos contenidos de la geometría del espacio, la concepción y aplicación de una didáctica contextualizada elaborada.
- El papel del estudiante evolucionó desde una posición pasiva y poco reflexiva, a uno más protagónico, en el que asciende su independencia, mientras que el rol del profesor se proyecta hacia la orientación en la búsqueda del conocimiento en el proceso de enseñanza-aprendizaje.
- Las exigencias de los programas ascendieron desde tener limitaciones en los conocimientos de la Geometría del Espacio y el desarrollo de las habilidades correspondientes hasta concebir su tratamiento de forma racional con mayor nivel de abstracción y generalización, aunque todavía de manera limitada se logra el desarrollo de habilidades para resolver problemas geométricos que no estimulan de manera satisfactoria el desarrollo del pensamiento geométrico espacial en los estudiantes.

1.2.Principales fundamentos teóricos del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría del espacio en la asignatura Matemática de la educación preuniversitaria.

En estudios realizados por prestigiosos investigadores como Klingberg (1972); Danilov y Skatkin (1978), Labarrere (1988); Álvarez (2009); Álvarez de Zayas (1990,1996); Fuentes (1996, 2009); Addine (2002, 2004); Castellanos (2001, 2007), entre otros, se precisa al proceso de enseñanza – aprendizaje como objeto de estudio de la Didáctica. Del análisis de los trabajos de estos investigadores se destaca la necesidad de la integración en este proceso, de lo cognitivo y lo afectivo, así como de lo instructivo, lo educativo y lo desarrollador, aspectos que se consideran esenciales para el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes de la educación preuniversitaria en Cuba.

Lo anterior se corresponde con la aspiración de la educación preuniversitaria, es decir, está dirigida a que los estudiantes adquieran conocimientos, habilidades y valores, acordes a los principios de la sociedad socialista que se construye, a partir de actitudes, concepciones y principios éticos alejados del individualismo, el egoísmo y sustentados en el colectivismo, la cooperación, el compromiso individual, colectivo y social.

El proceso de enseñanza – aprendizaje en la educación preuniversitaria tiene en la filosofía marxista – leninista, en el pensamiento educativo de los pedagogos cubanos, Félix Varela (1788–1853), José de la Luz y Caballero (1800–1862), Enrique José Varona (1849–1933), José Martí (1853–1895) y en el pensamiento de Fidel Castro (1926–2016) su fundamento filosófico esencial, al considerarse el desarrollo del hombre en su relación activa con otros individuos, la naturaleza y la sociedad, que le permite apropiarse de la experiencia histórico-social acumulada por la humanidad y el desarrollo integral de su personalidad y que sientan las bases científicas sobre las cuales se erige una verdadera ciencia del desarrollo humano (Santos, 2007).

Los fundamentos filosóficos anteriores se concretan en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en la educación preuniversitaria, en general, y en el de la geometría, en particular, como rama de esta ciencia, fundamentado en su uso en la vida cotidiana, pues se relaciona con

problemas de medidas que a diario ocupan al hombre, de cómo diseñar un cantero o una pieza de cerámica, cubrir una superficie o calcular el volumen de un cuerpo. (Rojas, 2009)

El proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría contribuye a la preparación de los estudiantes para emplearla en la vida diaria, por las siguientes razones (Rojas, 2009):

- Por su aplicación en las carreras universitarias y técnicas por las que puede optar el estudiante.
- Por su contribución al estudio de los elementos de la naturaleza, como base de la formación de la concepción científica del mundo.
- Por ser una fuente para el desarrollo de valores estéticos y culturales.
- Por su utilidad para el trabajo en las diferentes ramas de la Matemática.
- Por potenciar el desarrollo del pensamiento formal y el geométrico espacial, pues permiten pasar de lo concreto a lo abstracto y viceversa, lo que favorece en el estudiante la orientación espacial.
- Por desarrollar procedimientos y habilidades (percepción, deducción, imaginación, intuición, dibujo, representación, construcción de figuras y modelos) que propician la creatividad.
- Por estar presente en múltiples ámbitos de los sistemas productivos y de los servicios en el mundo actual.

En la educación preuniversitaria, se observan intenciones de perfeccionar el proceso de enseñanza – aprendizaje de la geometría, sin embargo, aún hay vestigios de una enseñanza tradicional, memorística y repetitiva que no propicia que el estudiante sea sujeto activo de su propio aprendizaje, debido a que, según Lima (2008), existen algunas limitaciones que dificultan la calidad de este proceso, a saber:

- El inadecuado empleo de métodos y medios de enseñanza.
- El tratamiento bastante formal, dirigido en lo esencial al reconocimiento de las figuras geométricas fundamentales y al estudio de sus propiedades de manera mecánica.

- Generalmente el estudiante no participa en la elaboración de conceptos geométricos de forma protagónica y se presentan estos por el docente en su forma terminada.
- El profesor, de manera general, realiza todo el razonamiento en lugar del alumno o señala como hallar la solución.

Lima (2008) también se refiere a otras insuficiencias como el bajo desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial como la visualización, la determinación de propiedades de figuras geométricas a partir de la visualización y percepción de las formas de las figuras geométricas tanto en el plano como en el espacio, así como el tratamiento formal a la terminología propia de esta ciencia y la falta de la exploración experimental, que van en detrimento de la calidad del proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría en la educación preuniversitaria.

En este aspecto, Rojas (2009), refiere que la manera de enfocar actualmente la enseñanza y el aprendizaje de la geometría del espacio, aún no resuelve algunas limitaciones en su tratamiento, relacionadas fundamentalmente con las posibilidades de desarrollar en los alumnos la visión espacial, así como la posibilidad de plantear conjeturas, experimentar, explorar, refutar, reformular, probar, establecer relaciones y realizar demostraciones de teoremas y proposiciones, que le permitan la búsqueda activa del conocimiento, a partir de la dirección del proceso por parte del profesor. Por tales motivos, es deficiente la habilidad que poseen los alumnos para realizar una transferencia del plano al espacio y del espacio al plano al concluir el preuniversitario.

En relación con lo anterior, Llorente (2016) expresa que esto se debe a la descontextualización de los contenidos matemáticos como conocimientos académicos aislados de la realidad cotidiana del estudiante, a la repetición y monotonía de las actividades de aula, provocadas por la anteposición de los conocimientos procedimentales, a los aspectos conceptuales del campo matemático, a la poca exigencia en la búsqueda de diferentes vías de solución a las tareas docentes, y al poco énfasis de los profesores en la socialización de las respuestas.

Investigadores como Rico y Silvestre (1004); Castellanos (2001, 2007); Castellano (2001); Zilberstein y Silvestre (1999), Zilberstein y Portela (2002), consideran que estas insuficiencias se revierten al asumir al proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, en general y al de la Geometría, en particular, desde un enfoque desarrollador, donde el estudiante se considere un ente activo en su aprendizaje y desarrolle al máximo las potencialidades de su personalidad, criterio que comparte el autor de esta investigación.

El enfoque desarrollador tiene como referente teórico común el Enfoque Histórico Cultural de Vigotsky y seguidores (Danilov 1975, Savin 1972, Ushinski 1975, Helmut Klein 1978, G. Labarrere 1988, Tomaschewski 1966; O, González 1994, L. Zankov 1975, Davidov 1989), que coinciden en que las relaciones entre la enseñanza, el aprendizaje y el desarrollo son análogas y responden a expectativas sociales y necesidades educativas comunes. Tomando como base estas ideas, Castellanos (2007, p. 46), afirman que "una educación desarrolladora es la que conduce al desarrollo, va delante del mismo, guiando, orientando, estimulando (...)"

Se asume para el proceso de enseñanza–aprendizaje de la geometría en la educación preuniversitaria, el concepto de zona de desarrollo próximo o potencial (ZDP) definido como: “(...) la distancia entre el nivel que alcanza el estudiante cuando soluciona una tarea de manera independiente (su desarrollo actual), y el nivel que puede alcanzar cuando la realiza con ayuda del docente o de sus compañeros más competentes en este terreno (su desarrollo potencial)” (Castellanos, 2001, p.95).

Al tener en cuenta este concepto, se considera la concepción de enseñanza, aprendizaje y proceso de enseñanza–aprendizaje de la geometría desde un enfoque desarrollador, para que tanto el docente como el estudiante conozcan y comprendan el rol que deben jugar en él, uno como facilitador del proceso (docente) y otro como protagonista esencial del mismo (estudiante). Por ello, se asume que:

- “(...) un aprendizaje desarrollador de la matemática es el que garantiza en el individuo la apropiación activa y creadora del saber y poder matemático, de estrategias de aprendizaje generales y específicas, de los procesos de pensamiento y las formas de trabajo propias de la

matemática, su simbología y terminología, que al ser estructurados en forma de sistema, le permitan comprender y transformar el mundo que le rodea y a su vez transformarse, potenciando el desarrollo de su independencia cognoscitiva en estrecha relación con los necesarios procesos de socialización, compromiso y responsabilidad social (...)” (Suero, 2001, p.11)

- “(...) una enseñanza en pos de un aprendizaje desarrollador presupone asumir la enseñanza no solo de estrategias cognitivas sino metacognitivas (...) convirtiéndolas de hecho en contenidos de enseñanza y la elaboración por parte del estudiante de la orientación para la aplicación de procedimientos, la cual es dada o elaborada generalmente por los docentes”. (Jiménez, 2000, p.6).
- “(...) el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática desde un enfoque desarrollador constituye un sistema en el cual tanto la enseñanza como el aprendizaje son subsistemas que garantizan la apropiación activa, creadora, reflexiva, significativa y motivada del contenido como parte de la cultura general integral, teniendo en cuenta el desarrollo actual, con el propósito de ampliar continuamente los límites de la zona de desarrollo próximo potencial. Ello implica una comunicación afectiva y el desarrollo de actividades intencionales, cuyo accionar didáctico genere estrategias de aprendizaje que permitan aprender a aprender Matemática como expresión del desarrollo constante de una personalidad integral y autodeterminada del estudiante. (Gibert, 2012, p. 27).

La precisión de estos conceptos en el escenario del proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría, contribuirá a que los estudiantes de preuniversitario, logren la aprehensión de los conocimientos, las habilidades y las capacidades geométricas requeridas para realizar aprendizajes durante toda su vida y aplicarlos en la práctica; además que se avance en el tránsito de la dependencia a la independencia y a la autorregulación, se promueva el desarrollo integral de la personalidad, sin soslayar sus condiciones y experiencias geométricas previas, recordando siempre que uno de los objetivos primordiales de la geometría es precisamente entender su naturaleza.

El autor de esta investigación se adscribe a lo planteado por Sandoval (2005), el cual señala que el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática (y el de la geometría como rama de esta) se encuentra en una etapa de renovación de sus enfoques, que persigue que los estudiantes adquieran una concepción científica del mundo, una cultura integral y un pensamiento científico que los habitúe a cuantificar, estimar, extraer regularidades, procesar informaciones, buscar causas y vías de solución, incluso de los hechos simples de la vida cotidiana y en consecuencia, los prepare para la actividad laboral.

Sobre la base de estudios realizados por investigadores como Gibert (2009), Jiménez (2000, 2007), Barrón (1991), entre otros, es necesario señalar que para lograr un proceso de enseñanza-aprendizaje desarrollador de la Matemática, este debe ser significativo para el estudiante. Según Ausubel (2000) el aprendizaje significativo se manifiesta cuando nuevas ideas e informaciones pueden ser aprendidas y retenidas en la medida en que conceptos relevantes o adecuados e inclusivos se encuentren apropiadamente claros y disponibles en la estructura cognitiva del individuo y sirvan, de esta forma, de anclaje a nuevas ideas y conceptos.

Por consiguiente, el aprendizaje significativo, debe asumirse como sustento del proceso de enseñanza-aprendizaje desarrollador de la geometría en la formación de la personalidad del estudiante de preuniversitario, pues este permitirá a los docentes elaborar tareas de aprendizaje en las que el estudiante pueda relacionar de manera no arbitraria y sustancial lo nuevo que aprende con lo ya ha aprendido anteriormente, lo que potencia el establecimiento de relaciones entre aprendizajes, los nuevos contenidos, los conceptos ya adquiridos y los nuevos conceptos que se forman, entre el conocimiento y la vida, la teoría y la práctica.

1.3.El desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial. Presupuestos teóricos esenciales.

El pensamiento geométrico espacial, según Ballester et al. (2007, p.32) “(...) no es más que un reflejo generalizado del espacio tridimensional basado en modelos. El mismo se pone de manifiesto cuando los alumnos forman un sistema de conceptos y relaciones mediante

abstracción del espacio real, pueden representar mediante dibujos o modelos, estos reflejos del espacio e imaginar nuevos cuerpos y relaciones geométrico espaciales”.

Es oportuno precisar, que esta definición reduce en cierta medida, el desarrollo de esta forma de pensamiento matemático a la representación de lo tridimensional en lo bidimensional, pues se obvia la reproducción, la construcción de esa figura espacial visualizada, pensada y creada en lo propiamente tridimensional, que a criterio del autor de esta investigación, es parte esencial también de este proceso y de vital importancia para comprender ese espacio físico que rodea al estudiante.

Por esta razón, se concuerda con Proenza (2002) que expresa que este pensamiento, es un reflejo generalizado y mediato del espacio físico tridimensional, que tiene una fuerte base sensoperceptual, que se inicia desde las primeras relaciones del individuo con el medio y que se sistematiza y se generaliza a lo largo del estudio de los contenidos geométricos en la escuela.

Sin embargo, a partir de los referentes, esta base sensoperceptual no ha sido suficientemente trabajada en las educaciones que le anteceden a la educación preuniversitaria, pues tiene que reflejarse en las habilidades del pensamiento geométrico espacial del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en el preuniversitario.

En este sentido, se coincide con Jungk (1982), el cual expresa que con el pensamiento geométrico espacial se deben desarrollar tres capacidades íntimamente relacionadas entre sí: la vista espacial, la representación espacial y la imaginación espacial, se precisa además, de acuerdo a los intereses de esta investigación, las capacidades de imaginación, reproducción y de construcción espacial.

El poco desarrollo de la capacidad de imaginación espacial en los estudiantes de preuniversitario, conlleva a que estos presenten serias dificultades para analizar el plano, las relaciones en el espacio y viceversa. Según Proenza (2002), esta se define como la capacidad de estudiar el plano y el espacio a través de sus conceptos, leyes y derivar razonamientos; por lo que va más allá de la Geometría para erigirse como un pensamiento dialéctico por excelencia.

Desde esta mirada, resulta significativo señalar que esta forma del pensamiento matemático no se limita a identificar de forma visual figuras geométricas y conocer su nombre. Proenza (2002) precisa que este exige del estudiante la exploración consciente del espacio, la comparación de los elementos observados, el establecimiento de relaciones entre ellos y la expresión verbal de las acciones realizadas y de las propiedades observadas, para de ese modo interiorizar el conocimiento, descubrir propiedades de las figuras y de las transformaciones, construir modelos, elaborar conclusiones para llegar a formular leyes generales y resolver problemas, ideas que son asumidas en esta investigación.

Investigadores como Feria (2006) y Frostig (1978), Horne (1978), Hoffer (1967) (citados por Uribe, 2014), han aportado variadas habilidades de percepción espacial: la coordinación visomotriz, la percepción figura-fondo, la constancia perceptual, la percepción de posición en el espacio, la percepción de las relaciones espaciales, la discriminación visual y la memoria visual, que a opinión de este autor son parte de la base sensoperceptual que deben tener los estudiantes.

La coordinación visomotriz se relaciona con la habilidad para coordinar la visión con el movimiento del cuerpo. La percepción figura-fondo es el acto visual de identificar una figura específica (el foco) en un dibujo (el fondo). Por otra parte, se encuentra la constancia perceptual (constancia figura y tamaño), que es la habilidad para reconocer que un objeto tiene propiedades invariantes, como el tamaño y la forma, y la variabilidad de sus impresiones son observadas desde diferentes puntos de vista.

La percepción de la posición en el espacio, que es “la capacidad para determinar la relación de un objeto con relación a otro y al observador” (Feria et al., 2006, p. 28). Por otro lado, aparece, la percepción de relaciones espaciales, que “se relaciona con la destreza para ver dos o más objetos en relación con uno mismo o entre ellos, y está estrechamente ligada en algunas tareas con la percepción de la posición en el espacio” (Feria et al., 2006, p. 28). Por último, se encuentran la discriminación visual, que hace referencia a la “disposición para distinguir semejanzas y diferencias entre los objetos y la memoria visual, que implica la habilidad para

recordar con precisión un objeto que no está más a la vista y luego relacionar sus características con otros objetos que estén ya sea a la vista o no” (Hoffer, 1977) (citado por Uribe, 2014).

Se debe señalar el hecho de que las habilidades presentadas anteriormente no están en términos de “saber hacer”, sino que son expresión de procesos cognoscitivos, como la percepción, la memoria, el pensamiento, entre otros, inherentes a las capacidades (González, 2001), pues no reflejan acciones concretas, realizables y medibles, por tanto, no describen operaciones y procedimientos detallados que orienten al profesor hacia su desarrollo, lo que requiere nuevos aportes teóricos y prácticos concretos en esta dirección.

Uno de los resultados que puede contribuir a la precisión de las habilidades del pensamiento geométrico espacial es la descripción que realiza McGee (1979) (citado por Fernández, 2011, p. 27) de diez habilidades, distribuidas en los siguientes dos grupos:

Habilidades de visualización espacial:

- 1) Habilidad para imaginar la rotación de un objeto, la representación de un objeto y los cambios relativos de posición de objetos en el espacio.
- 2) Habilidad para visualizar una configuración en la cual hay un movimiento entre sus partes.
- 3) Habilidad para comprender movimientos imaginarios en tres dimensiones y para manipular objetos en la imaginación.
- 4) Habilidad para manipular o transformar la imagen de un patrón espacial en otra disposición.

Habilidades de orientación espacial

- 1) Habilidad para determinar relaciones entre diferentes objetos espaciales.
- 2) Habilidad para reconocer la identidad de un objeto cuando es visto desde diferentes ángulos o cuando el objeto se mueve.
- 3) Habilidad para considerar relaciones espaciales donde la orientación del observador es esencial.
- 4) Habilidad para percibir patrones espaciales y para compararlos entre ellos.
- 5) Capacidad para permanecer sin confusiones por las diversas orientaciones en la que un objeto puede ser presentado.

6) Habilidad para percibir patrones espaciales o mantener la orientación respecto de los objetos en el espacio.

Sin embargo, aunque este autor logra un nivel mayor de precisión de las habilidades del pensamiento geométrico espacial, se considera que al igual que las aportadas por otros autores, referenciados anteriormente, estas reflejan la etapa sensoperceptible de este pensamiento, pues se obvian las relacionadas con las otras dos etapas de la teoría del conocimiento.

En el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial, juegan un papel esencial los procesos de visualización de acuerdo a lo planteado por Clements y Battista (1992), estos integran los procesos a través de los cuales se obtiene conclusiones, a partir de las representaciones de los objetos tridimensionales y de las relaciones o transformaciones observadas en construcciones y manipulaciones.

Estas valoraciones apuntan a la necesidad de determinar las habilidades que permitan la realización de estos procesos de representación, construcción y manipulación de los objetos tridimensionales, cuestión que no se esclarece suficientemente en la bibliografía consultada.

Castiblanco et al. (2004), señalan que la construcción geométrica puede ser descrita como un dibujo técnico, en el que la utilización de determinados instrumentos, puede asegurar la adecuación del dibujo a determinadas propiedades. Esta tiene dos propósitos esenciales: asegurar que se cumplan las propiedades geométricas, superando así las limitaciones de la percepción, necesariamente presentes en el dibujo y realizar una generalización que asegure la reproducción del dibujo, teniendo en cuenta únicamente sus propiedades fundamentales por medio del uso de instrumentos técnicos.

Sin embargo, se considera que la construcción geométrica no es solo dibujar una figura espacial sobre la hoja por los estudiantes, sino que también es la construcción de esta con sus propias manos o con la ayuda de un asistente matemático, al tomar en cuenta sus propiedades fundamentales; en este aspecto radica la importancia de la construcción geométrica como motor impulsor del pensamiento deductivo.

Se asumen las ideas de Castiblanco, et. al (2004), quienes expresan que el estudiante puede descubrir, a través de la construcción geométrica, propiedades que no tuvo en cuenta, lo que le permite detectar que hay una relación de implicación entre las propiedades que tuvo en cuenta y las que descubrió después.

El Modelo de Van Hiele (Jaime y Gutiérrez, 1990), el cual tiene cada vez mayor aceptación a nivel internacional en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, constituye otro de los referentes teóricos que posibilitan la determinación y precisión de habilidades del pensamiento geométrico espacial. En este modelo, Van Hiele propone cinco niveles de desarrollo del pensamiento geométrico:

Nivel 1. Es el nivel de la visualización, llamado también de familiarización o reconocimiento, en el que el estudiante percibe las figuras geométricas en su totalidad, de manera global, sin detectar relaciones entre tales formas o entre sus partes. Los estudiantes perciben las figuras como objetos individuales, es decir, no son capaces de generalizar las características que reconocen en una figura a otras de su misma clase; se limitan a describir su aspecto físico, las reconocen, las diferencian o las clasifican sobre la base de las semejanzas o diferencias físicas entre ellas; no suelen reconocer explícitamente las partes que las componen ni sus propiedades matemáticas.

En este nivel, los objetos sobre los cuales los estudiantes razonan son clases de figuras reconocidas visualmente como de “la misma forma”.

Nivel 2. Es un nivel de análisis, de conocimiento de las componentes de las figuras, de sus propiedades básicas. Estas propiedades se comprenden a través de observaciones efectuadas durante trabajos prácticos como mediciones, dibujo, construcción de modelos, entre otros. En este nivel los objetos sobre los cuales los estudiantes razonan son las clases de figuras y piensan en términos de conjuntos de propiedades que se asocian con estas.

Nivel 3. Llamado de ordenamiento o de clasificación. Las relaciones y definiciones empiezan a quedar clarificadas, pero sólo con ayuda y guía. Ellos pueden clasificar figuras jerárquicamente mediante la ordenación de sus propiedades y dar argumentos informales para justificar sus

clasificaciones. Comienzan a establecerse las conexiones lógicas a través de la experimentación práctica y del razonamiento.

En este nivel, los objetos sobre los cuales razonan los estudiantes son las propiedades de clases de figuras.

Nivel 4. Es de razonamiento deductivo: en él se entiende el sentido de los axiomas, las definiciones, los teoremas, pero aún no se hacen razonamientos abstractos, ni se entiende suficientemente el significado del rigor de las demostraciones.

Nivel 5. Es el del rigor: es cuando el razonamiento se hace rigurosamente deductivo. Los estudiantes razonan formalmente sobre sistemas matemáticos, pueden estudiar geometría sin modelos de referencia y razonar formalmente manipulando enunciados geométricos tales como axiomas, definiciones y teoremas.

Teniendo en cuenta los niveles del modelo de Van Hiele, la mayoría de los estudiantes de la educación preuniversitaria deberían arribar a esta educación en los niveles cuatro y cinco, pues en las educaciones primaria y secundaria estudian las figuras geométricas planas y espaciales, sus propiedades, las relaciones entre ellas y las han clasificado y definido formalmente.

Lo antes expuesto, corrobora la necesidad de precisar las habilidades del pensamiento geométrico espacial para esta educación, en correspondencia con los referentes teóricos asumidos en esta investigación, lo que forma parte de los aportes de esta investigación.

Para la precisión de estas habilidades y el perfeccionamiento de la dirección del proceso de su desarrollo en los estudiantes de la educación preuniversitaria, es necesario asumir otros referentes teóricos relacionados con la teoría de la actividad humana, y con los modelos de desarrollo de habilidades recogidos en la literatura científica.

El concepto habilidad, a pesar de las diferentes acepciones que aparecen en la literatura psicológica y pedagógica, generalmente se utiliza como sinónimo de “saber hacer” (González, 2001), es decir, lo que le permite al hombre realizar una determinada tarea.

Para la psicología, “las habilidades constituyen el dominio de operaciones (psíquicas y prácticas) que permiten una regulación racional de la actividad” (González, 2001, p.117) y resultan de la sistematización de acciones que están subordinadas a un objetivo consciente.

Esta definición, aceptada por la comunidad científica, ha permitido que en el plano de la Didáctica General, Álvarez de Zayas (1990) y Fuentes (1998), caractericen las habilidades como acciones que el sujeto realiza y Zilberstein (2002) como el conocimiento en acción.

En el caso particular de la Didáctica de la Matemática, las habilidades matemáticas, Ferrer y Rebollar (2007, p. 5), las definen como “(...) la construcción, por el alumno, del modo de actuar inherente a una determinada actividad matemática, que le permite buscar o utilizar conceptos, propiedades, relaciones, procedimientos matemáticos, utilizar estrategias de trabajo, realizar razonamientos, juicios que son necesarios para resolver problemas matemáticos”.

En esta investigación, se asume esta definición de habilidad matemática, pues en ella se reflejan las formas de trabajo y pensamiento matemático, que permiten a los estudiantes familiarizarse con las formas de buscar, descubrir, asimilar y construir nuevos conocimientos matemáticos y aprender con mayor racionalidad, de forma consciente y activa y, de esta manera, ser sujeto de su propio aprendizaje, aspectos que son imprescindibles para el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial.

Se asume a su vez, la manera en que estos investigadores orientan la estructuración sistémica de las habilidades matemáticas en habilidad general (la resolución de problemas), habilidades básicas (como las construcciones que realiza el alumno de métodos de solución o análisis de un determinado problema matemático, las que se constituyen en objetivos parciales en la preparación de los alumnos para resolver problemas) y habilidades elementales (construcciones de procedimientos específicos que se derivan de manera directa del modo de operar con conceptos, teoremas o procedimientos y que a partir del establecimiento de conexiones entre estos se van conformando métodos de solución, que constituyen la base de las habilidades matemáticas básicas.

En relación con el proceso de desarrollo de habilidades, de la revisión bibliográfica realizada, se derivan las regularidades siguientes:

- Zilberstein y Silvestre (1999) plantean que la habilidad se desarrolla en la actividad e implica el dominio de las formas de la actividad cognoscitiva, práctica y valorativa.
- Machado, E. y Montes de Oca, N. (2004), reconocen que se desarrollan y se manifiestan en la actividad y la comunicación, y que este desarrollo es el resultado de la interacción entre las condiciones internas y externas del individuo y de su interacción social con otros individuos.
- Ferrer y Rebollar (2007) plantean que el proceso de desarrollo de habilidades matemáticas transcurre por tres etapas, que responden a los eslabones didácticos del proceso de enseñanza-aprendizaje y su dinámica: etapa de planteamiento, comprensión y análisis de los problemas esenciales y sus subproblemas (orientación del sistema de habilidades matemáticas), etapa de elaboración, ejercitación y sistematización de las habilidades matemáticas básicas y elementales (ejecución del sistema de habilidades) y etapa de aplicación del sistema de conocimientos y habilidades a la resolución de problemas variados (perfeccionamiento de la ejecución del sistema de habilidades).

García (2002) por su parte, precisa las habilidades matemáticas que estructuran la habilidad resolver problemas geométricos, las cuales se asumen en la investigación:

1. Orientarse en el problema. Para ello, se identifica el tipo de problema geométrico que se va a resolver, las condiciones y exigencias presentes en el mismo; se investiga si se resolvieron problemas con condiciones o exigencias análogas o si el problema puede ser reducido a otros problemas ya resueltos o si puede descomponerse en subproblemas más sencillos; se reformula si es necesario el problema para hacerlo más comprensible; se representan las condiciones y/o exigencias del problema en una figura geométrica de análisis; se precisan los conceptos, teoremas o relaciones presentes..
2. Buscar vías para solucionar el problema. Para ello, se formulan e interpretan los teoremas y definiciones, se interpretan las relaciones geométricas, para extraer de todos ellos nuevas informaciones o deducir nuevas consecuencias y nexos, precisando los más trascendentales

para la resolución del problema; se realizan construcciones auxiliares en la figura geométrica de análisis en el caso necesario; se descompone el problema en subproblemas más sencillos; se aplican métodos de reducción: inductivos y no inductivos, así como métodos deductivos; se seleccionan y aplican procedimientos heurísticos de solución; se valoran vías conocidas o vías producidas por la especulación, se emiten hipótesis sobre posible o posibles vías de solución y se valora la posibilidad de su ejecución; se determina si el problema se deriva de otro más general para valorar si la vía de solución utilizada en aquel es posible particularizarla en éste, o si el problema es una generalización de otros problemas particulares para valorar si con las vías o estrategias de solución en ellos aplicadas se puede llegar a una vía o estrategia general que sea posible aplicarla a su solución; se precisa las acciones que se van a ejecutar una vez encontrada la posible vía o estrategia de solución para de esta forma ordenarlas y elaborar un plan de solución.

3. Experimentar las vías para solucionar el problema. Para ello, se desarrolla el plan de solución para comprobar y fundamentar cada paso; se valora si este ha sido correctamente elaborado, si le faltan pasos, si le sobran pasos, si los pasos están lógicamente ordenados, si es necesario perfeccionarlos; se revisa, reconsidera, perfecciona o rechaza la estrategia de trabajo seguida en la solución del problema, y culmina este proceso cuando se llegue a lo exigido en el problema.

Las etapas para el desarrollo de habilidades matemáticas (Ferrer y Rebollar, 2007) y las habilidades contentivas dentro de la habilidad resolver problemas geométricos (García, 2002), son asumidas en esta investigación, pues a partir de ellas se favorece el protagonismo del estudiante en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio y en el proceso de desarrollo de su pensamiento geométrico espacial, pues exigen de este la búsqueda y la construcción del conocimiento, la experimentación, visualización, representación de los objetos geométricos para la deducción de sus propiedades esenciales, la realización de conjeturas y la demostración de la veracidad de las proposiciones que se infieran del análisis y la percepción.

El autor considera que los referentes teóricos asumidos, sirven de sustento para la elaboración de la metodología para conducir por los profesores el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial, puesto que los eslabones y componentes que se diseñan parten de la premisa esencial de que el conocimiento se produce cuando el estudiante es capaz de buscar, reactivar, utilizar, aplicar los conocimientos previos que necesita a la resolución de problemas geométricos relacionados con la geometría del espacio y transferirlos a la resolución de problemas nuevos, que favorezcan la búsqueda, la elaboración y construcción de nuevos conocimientos.

En el análisis de los referentes teóricos se constata que es limitada la precisión de las habilidades del pensamiento geométrico espacial, pues las habilidades propuestas responden en gran medida a la etapa sensorial de la adquisición del conocimiento, de la misma manera, son escasas las precisiones de aquellas habilidades que permiten el tránsito del estudiante a lo abstracto y a lo concreto pensado, en correspondencia con los niveles de pensamiento geométrico propuestos por Van Hiele, de este modo, se constata la carencia de una metodología para su desarrollo.

Los referentes teóricos analizados anteriormente posibilitan realizar el análisis del diagnóstico del estado actual del proceso de desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial en los estudiantes de preuniversitario.

1.4. Diagnóstico del estado actual del proceso de desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial en la educación preuniversitaria.

Para la realización del diagnóstico del estado actual del proceso de desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial en la educación preuniversitaria, se tomó como población los 603 estudiantes y los 10 profesores de Matemática del preuniversitario “Mártires del Porvenir” del municipio Diez de Octubre, de la provincia La Habana y como muestra el 30% del total de estudiantes de cada grado, lo que equivale a 68 estudiantes de décimo, 48 de oncenos y 65 de duodécimo grados, y los 10 profesores del centro.

Como métodos y técnicas para la valoración de las principales insuficiencias en el proceso de desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial, se realizó el análisis de los programas de preuniversitario, las orientaciones metodológicas, la revisión y análisis de exámenes de ingreso y pruebas finales; se realizó entrevistas a metodólogos provinciales y municipales, encuestas a profesores y observaciones a clases.

Como **indicadores** se precisó los siguientes: conocimientos de los profesores sobre las habilidades del pensamiento geométrico espacial y sobre las vías para la conducción de su desarrollo; preparación de los estudiantes para resolver problemas de geometría del espacio y precisión de orientaciones metodológicas para conducir el proceso de desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial.

Del análisis de los métodos y técnicas aplicadas, se pudo constatar lo siguiente:

En los programas de Matemática y en las orientaciones metodológicas de cada uno de los grados del preuniversitario, se pondera el desarrollo del pensamiento lógico de los estudiantes, con énfasis en los procedimientos lógicos, que si bien son necesarios para el desarrollo del pensamiento geométrico espacial, no resultan suficientes. Se hace alusión solo a habilidades como observar y comparar para distinguir propiedades de los objetos y se le da más peso a la abstracción, al razonamiento lógico-deductivo riguroso para demostrar teoremas de la geometría del espacio.

Asimismo, se reconoce como lo esencial de la geometría del espacio, que los estudiantes conozcan relaciones fundamentales en el espacio y que sean capaces de demostrar propiedades simples y aplicar sus conocimientos a la resolución de ejercicios y problemas de cálculo y demostración. Como se puede observar, no se presta una debida atención al desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial que forma parte esencial del proceso de resolución de estos ejercicios y problemas.

En el análisis de la tabulación de los resultados de los exámenes de ingreso a la educación superior y de las pruebas finales, se constató que en las respuestas a las preguntas relacionadas con la geometría del espacio, el 87,7% de los estudiantes de la muestra, no establece relaciones

lógicas entre las figuras planas presentes en el cuerpo geométrico; el 65,3% no identifica los conceptos de las figuras planas y de los cuerpos geométricos; el 91,2% no aplica correctamente la definición esos conceptos; el 89,1% no identifica propiedades esenciales de las figuras planas y de los cuerpos geométricos; el 90,3% no establece relaciones lógicas entre esas propiedades; el 89,5% no aplica correctamente los teoremas de la planimetría y la estereometría; el 95,6% no deduce con claridad las consecuencias entre las informaciones que se dan en los datos del ejercicio o problema y el 97,6% no establece un ordenamiento lógico de las respuestas a los ejercicios y problemas.

La **observación a clases** (Anexo 1) corroboró que en el 88,7% los estudiantes presentaron serias dificultades para resolver ejercicios, problemas de cálculo y demostración de la geometría del espacio, debido a sus insuficiencias para identificar las propiedades de las figuras planas y espaciales, así como para identificar relaciones entre las propiedades de estas figuras: deducir consecuencias de los datos y esbozar una figura geométrica que les permita comprender mejor las condiciones y exigencias del ejercicio o problema.

Se pudo constatar en el 85,3% de las clases observadas, que los profesores no prestan atención al desarrollo de habilidades relacionadas con la vista espacial, la representación y la imaginación espacial, pues para ellos, lo más importante es que los estudiantes lleguen a la solución del ejercicio o problema, la mayoría de las veces con su ayuda y mediante la utilización de una conversación que tiende a ser más socrática que heurística, no se atiende a lo interior del proceso de resolución, en el que se manifiestan esas habilidades.

En la encuesta realizada a los profesores, se obtuvo el resultado siguiente (Anexos 2 y 3):

En la **primera pregunta**, relacionada con las habilidades del pensamiento geométrico espacial utilizan para contribuir al desarrollo en sus estudiantes de este componente del pensamiento matemático, en correspondencia con sus características como estudiantes de preuniversitario, más del 50% reconoce utilizar las habilidades: percepción de las relaciones espaciales, reconocer que un objeto tiene propiedades invariantes, determinar la relación de un objeto con relación a otro, distinguir semejanzas y diferencias entre los objetos, relacionar sus

características con otros objetos que estén ya sea a la vista o no, determinar la relación de un objeto con relación a otro e identificar propiedades de figuras planas (7 de las 15 habilidades presentadas en la encuesta).

De las restantes 8 habilidades, menos del 50% de los encuestados reconoce utilizarlas. Estas últimas son: coordinación visomotriz, percepción figura-fondo, constancia perceptual, percepción de posición en el espacio, identificar una figura específica (el foco) en un dibujo (el fondo), recordar con precisión un objeto que no está más a la vista, construir manualmente un cuerpo geométrico, representar en un plano al cuerpo geométrico en las vistas frontal, lateral, desde arriba y desde abajo.

En la **pregunta dos**, relacionada con conocer cuáles son las razones por las que no utilizan las habilidades que no fueron seleccionadas en la pregunta uno, el 70% expresó que no está familiarizado con ellas, el 80% no comprende en qué consisten, el ciento por ciento considera que el estudiante las debe tener desarrolladas desde enseñanzas anteriores; el 70% no sabe si las ha utilizado de forma inconsciente; el 30% no las considera necesarias y el 80% no considera que sean habilidades.

En el caso de la pregunta tres, el ciento por ciento coincide en que sus estudiantes presentan las siguientes insuficiencias para resolver problemas de la geometría del espacio: identificar figuras planas y cuerpos geométricos, identificar propiedades de figuras planas, reconocer las relaciones existentes entre las figuras y los cuerpos geométricos, representar cuerpos geométricos mediante un esbozo gráfico, calcular el área y volumen, extraer información de los datos que se dan en las condiciones del problema, relacionar la información que se extraen de los datos, deducir consecuencias de las relaciones entre las informaciones extraídas de los datos, determinar las informaciones y consecuencias que resultan imprescindibles para llegar a la exigencia del problema, elaborar conscientemente un plan de solución, escribir organizadamente la solución del problema y fundamentar los pasos en la solución del problema.

En la pregunta cuatro, el ciento por ciento de los encuestados respondió que no tienen conocimiento de alguna metodología para el desarrollo de habilidades del pensamiento

geométrico espacial. Por otra parte, en el caso de la pregunta cinco, el 20% ha recibido preparación teórica o metodológica para conducir el proceso de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial, lo que no es así, para el 80%.

En la entrevista realizada a los metodólogos de Matemática (Anexo 4) ambos coincidieron en que las siguientes habilidades no eran frecuentemente utilizadas tanto por ellos como por los docentes en el proceso de enseñanza – aprendizaje de la Matemática, ponderaron: la coordinación visomotriz, percepción figura-fondo, constancia perceptual, percepción de posición en el espacio, identificar una figura específica (el foco) en un dibujo (el fondo), recordar con precisión un objeto que no está más a la vista, construir manualmente un cuerpo geométrico, representar en un plano al cuerpo geométrico en las vistas frontal, lateral, desde arriba y desde abajo. Las razones que estos emitieron al respecto estuvieron dirigidas esencialmente a la insuficiente preparación teórica y metodológica que tienen y a la poca atención que se ofrece al desarrollo de estas habilidades en los programas y orientaciones metodológicas del preuniversitario.

De igual manera, plantean que no conocen una metodología específica para el desarrollo de habilidades y que en las preparaciones metodológicas no se abordan temas relacionados con este aspecto.

De manera general, del análisis de los resultados de los instrumentos aplicados se infiere que es limitada la atención al desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial por los profesores de Matemática de la educación preuniversitaria, lo que se evidencia en las insuficiencias de los estudiantes en la resolución de ejercicios y problemas de la geometría del espacio.

Lo antes expuesto, es consecuencia de la insuficiente preparación teórica y metodológica de los profesores de la muestra, pues no cuentan con una metodología para este propósito, además este aspecto no es abordado explícitamente en los programas y orientaciones metodológicas de preuniversitario, ni constituye una prioridad de la preparación metodológica que reciben en la provincia, en el municipio y en las escuelas.

Estas razones justifican la necesidad de la elaboración de una metodología que fundamente teóricamente el proceso de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial y oriente a los profesores para su implementación en la práctica pedagógica.

CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO 1

1. El análisis de los presupuestos epistemológicos evidencia la necesidad de precisar las habilidades del pensamiento geométrico espacial que se deben desarrollar en los estudiantes de la educación preuniversitaria, así como la necesidad de la elaboración de una metodología que lo propicie, en la que se tome en cuenta el enfoque desarrollador del proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio.
2. La valoración de la situación actual corrobora las limitaciones en el proceso de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial en la educación preuniversitaria, no solo por las dificultades que presentan los estudiantes en la resolución de ejercicios y problemas de la geometría espacial, sino también por las limitaciones teóricas y metodológicas de los profesores de Matemática.

CAPÍTULO 2.

EL DESARROLLO DE HABILIDADES DEL PENSAMIENTO GEOMÉTRICO ESPACIAL. METODOLOGÍA PARA LA CONDUCCIÓN DEL PROCESO POR LOS PROFESORES DE LA ENSEÑANZA PREUNIVERSITARIA

En este capítulo se presenta la metodología para la conducción por los profesores del proceso de desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial en estudiantes de preuniversitario. Sirven de base para su elaboración, los fundamentos teóricos que la sustentan, se caracterizan las habilidades del pensamiento geométrico espacial, sus eslabones, componentes y procedimientos, y se revelan las relaciones que entre ellos se establecen.

2.1. Fundamentos y referentes teóricos de la metodología para la conducción por los profesores del proceso de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial en estudiantes de preuniversitario.

La metodología para la conducción del proceso de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial, tiene como fundamento teórico base, la Filosofía Marxista – Leninista, al tomarse en cuenta para su elaboración que “el conocimiento en su aprehensión de la realidad transcurre de lo sensorialmente concreto a lo abstracto y de éste a lo concreto, resultando su movimiento general de lo abstracto a lo concreto” (Sánchez, Guadarrama y Araujo, s.a, p.22).

Lo anterior se materializa en la premisa que posibilita que los estudiantes se enfrenten a la resolución de problemas geométricos de estereometría (lo concreto pensado), primero visualizar las figuras geométricas que se presentan, observarlas atentamente para identificarlas y reconocer sus propiedades, realizar un esbozo o una representación de esas figuras, y construirlas (lo sensorial concreto) para de esta forma, compararlas, relacionar sus propiedades, deducir consecuencias de esas relaciones y comparaciones, y descubrir nuevas propiedades (lo abstracto).

El enfoque Histórico-Cultural de Vigotski (1982) y sus seguidores, se constituye en el

fundamento psicológico de la metodología, pues considera, que las relaciones entre la enseñanza, el aprendizaje y el desarrollo, responden a expectativas sociales y a necesidades educativas. Se asume el concepto de zona de desarrollo próximo o potencial, pues la conducción del proceso de desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial, parte del diagnóstico, del nivel de desarrollo que tienen los estudiantes de estas habilidades y desde este, se planifican y organizan los niveles de ayuda por parte del profesor, de otros estudiantes y del grupo, a través de la actividad y la comunicación, hasta lograr su independencia cognoscitiva para enfrentarse con éxito a la resolución de problemas geométricos de la estereometría.

En consecuencia con las ideas de Vigotski (1982) y seguidores, se asume como fundamento didáctico el enfoque desarrollador de la enseñanza y el aprendizaje, al considerarse en la metodología propuesta la utilización de métodos productivos y procedimientos desarrolladores, que favorezcan que la enseñanza de la geometría del espacio conduzca a los estudiantes, a través de las formas de pensamiento y trabajo matemático, a descubrir y construir: procedimientos heurísticos, técnicas, estrategias de trabajo y conocimientos matemáticos y en consecuencia, que desarrollen las habilidades del pensamiento geométrico espacial y puedan resolver problemas geométricos de la estereometría con éxito y calidad.

De la Pedagogía se asume los principios didácticos para la dirección del proceso pedagógico propuestos por Addine, F., González, M. y Recarey, S. (2003), particularmente el principio de la unidad entre lo afectivo y lo cognitivo en el proceso de educación de la personalidad, el principio de la unidad entre la actividad, la comunicación y la personalidad, el principio del carácter colectivo e individual de la educación y el respeto a la personalidad del educando y el principio de la unidad del instructivo, lo educativo y lo desarrollador.

En relación a las habilidades del pensamiento geométrico espacial y al proceso de su desarrollo para realizar en la metodología, precisiones de estas habilidades y para estructurar sus eslabones y componentes, se toma en cuenta los siguientes referentes teóricos, ya analizados en el capítulo I:

- Los niveles de desarrollo del pensamiento geométrico de Van Hiele (Jaime y Gutiérrez, 1990).
- Las habilidades del pensamiento geométrico espacial descritas por McGee (Fernández, 2011).
- La estructuración sistémica de las habilidades matemáticas en habilidad general (resolución de problemas), las habilidades matemáticas básicas y las habilidades elementales, propuestas por Ferrer y Rebollar (2007) y en concordancia con ello, la propuesta de García (2002) sobre las habilidades matemáticas que estructuran a la habilidad resolver problemas geométricos.
- Las etapas por las que transcurre el proceso de desarrollo de habilidades matemáticas, propuestas por Ferrer y Rebollar (2007).

Se asume la definición de metodología como resultado científico de De Armas (2003, p. 35), al plantearla como “...un sistema de métodos, procedimientos y técnicas que regulados por determinados requerimientos nos permiten ordenar mejor nuestro pensamiento y nuestro modo de actuación para obtener determinados propósitos cognoscitivos”.

Desde esta perspectiva, la autora define como rasgos que la caracterizan los siguientes:

- Es un resultado relativamente estable que se obtiene en un proceso de investigación científica.
- Responde a un objetivo de la teoría y/o la práctica educativa.
- Se sustenta en un cuerpo teórico (categorial y legal) de la Filosofía, las Ciencias de la Educación, las Ciencias Pedagógicas y las ramas del conocimiento que se relacionan con el objetivo para el cual se diseña la metodología.
- Es un proceso lógico conformado por “etapas”, “eslabones”, o “pasos” condicionantes y dependientes, que ordenados de manera particular y flexible, permiten el logro del objetivo propuesto.
- Cada una de las etapas mencionadas incluye un sistema de procedimientos que son condicionantes y dependientes entre sí y que se ordenan lógicamente de una forma específica.
- Tiene un carácter flexible aunque responde a un ordenamiento lógico.

Como principios en los que se sustenta la metodología para el desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial se asume los principios didácticos propuestos por Silvestre y Zilberstein (2002), porque sientan las bases para la transformación del proceso de enseñanza–aprendizaje en las clases, como un proceso de interacción dinámica de los sujetos con el objeto de aprendizaje y de los sujetos entre sí, donde se integran acciones dirigidas a la instrucción, al desarrollo y a la educación. Estos principios son:

- Diagnóstico integral de la preparación del estudiante para las exigencias del proceso de enseñanza-aprendizaje, nivel de logros y potencialidades en el contenido del aprendizaje, desarrollo intelectual y afectivo valorativo.
- Estructurar el proceso de enseñanza-aprendizaje hacia la búsqueda activa del conocimiento por el estudiante, tener en cuenta las acciones que realizará en los momentos de orientación, ejecución y control de la actividad y el uso de medios de enseñanza que favorezcan la actividad independiente y la búsqueda de la información.
- Concebir un sistema de actividades para la búsqueda y la exploración del conocimiento por el estudiante, desde posiciones reflexivas, que estimule y propicie el desarrollo del pensamiento y la independencia en el escolar.
- Orientar la motivación hacia el objetivo de la actividad de estudio y mantener su constancia.
- Desarrollar la necesidad de aprender y de entrenarse en cómo hacerlo.
- Estimular la formación de conceptos y el desarrollo de los procesos lógicos del pensamiento, así como el alcance del nivel teórico, en la medida en que se produce la apropiación de los conocimientos y se eleva la capacidad para resolver problemas.
- Desarrollar formas de actividad y de comunicación colectivas, que favorezcan el desarrollo intelectual, para lograr la adecuada interacción de lo individual con lo colectivo en el proceso de enseñanza-aprendizaje por el estudiante.
- Atender las diferencias individuales en el desarrollo de los escolares, en el tránsito del nivel logrado hacia el que se aspira.

- Vincular el contenido de aprendizaje con la práctica social y estimular la valoración por el estudiante en el plano educativo y los procesos de su formación cultural general”. (Silvestre y Zilberstein, 2002, p. 35).

Para la elaboración de la metodología para el desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial se hace necesaria la precisión de estas habilidades para su consecuente desarrollo en el proceso de enseñanza–aprendizaje de la Matemática en el preuniversitario.

2.2. Sistema de habilidades del pensamiento geométrico espacial

Del análisis de los aportes teóricos de diversos investigadores sobre las habilidades del pensamiento geométrico espacial y del diagnóstico del estado actual del desarrollo de estas en los estudiantes de preuniversitario, descritos en el capítulo anterior, apunta a la necesidad de precisarlas, lo que contribuirá a perfeccionar su conducción en el proceso de enseñanza–aprendizaje de la Matemática por parte de los profesores que imparten esta asignatura y, de este modo, elevar la calidad del aprendizaje de los contenidos de la geometría del espacio.

En correspondencia con los referentes teóricos y metodológicos en los que se sustenta la metodología, se asume la habilidad resolver problemas geométricos tanto de la planimetría como de la estereometría como una de las habilidades generales de la asignatura Matemática en la educación preuniversitaria. Esta habilidad se debe formar y desarrollar a través del estudio de todos los contenidos matemáticos de la asignatura en este nivel de enseñanza, con mayor incidencia en los relacionados con la geometría.

La habilidad resolver problemas geométricos tanto de la planimetría como de la estereometría “...es la construcción y dominio, por el alumno, de los modos de actuar y métodos de solución de problemas al utilizar los conceptos, teoremas y procedimientos matemáticos, en calidad de instrumentos y las estrategias de trabajo heurístico para la sistematización de esos instrumentos en una o varias vías de solución” (Ferrer, 2000, p.58).

En todos los grados de la educación preuniversitaria, generalmente los problemas geométricos a resolver son los siguientes:

- Problemas de cálculo de magnitudes geométricas tales como longitudes de segmentos, lados, perímetros, áreas y volúmenes de figuras geométricas.
- Problemas de demostración de proposiciones geométricas tales como la demostración de la semejanza de triángulos, paralelismo y perpendicularidad entre rectas, entre planos, entre rectas y planos, la demostración de razones y proporciones que se establecen en figuras geométricas o entre figuras geométricas, entre otros.
- Problemas de determinación geométrica, como la determinación de lugares geométricos, de puntos, de rectas que cumplan determinadas condiciones, de ecuaciones de rectas, curvas de segundo grado, de planos, determinación de los elementos de rectas, planos, curvas de segundo grado dadas sus ecuaciones, determinación de puntos y/o rectas de intersección y relaciones de posición entre rectas, entre planos, entre rectas y planos, entre rectas y curvas de segundo grado y entre curvas de segundo grado. (García, 2002).

De acuerdo a lo expuesto anteriormente, la habilidad general resolver problemas geométricos tanto de la planimetría como de la estereometría se sistematizará a través de las habilidades geométricas básicas:

- Calcular magnitudes geométricas.
- Demostrar proposiciones geométricas.
- Determinar objetos, lugares geométricos, relaciones y posiciones en figuras geométricas y entre figuras geométricas.

Según Ferrer (2000, p.59-60) estas habilidades geométricas básicas van a expresar la construcción y dominio de los métodos de solución o análisis de problemas geométricos y responden a objetivos parciales en la preparación para resolverlos en un complejo de materia determinado. En ellas, se pueden concretar métodos de solución para uno o varios tipos de problemas.

Estas responden a un nivel de desarrollo parcial de la habilidad geométrica general, indican el nivel de aplicación exigido a conceptos, relaciones y procedimientos geométricos que se sistematizan en un método de solución y expresan el nivel de profundidad con que se deben elaborar. (Ferrer, 2000).

Resultan base de dichas habilidades geométricas básicas otras habilidades de un nivel menor de sistematicidad denominadas habilidades geométricas elementales, reflejan las condiciones concretas necesarias en la identificación, comprensión, análisis, búsqueda de relaciones, deducción de consecuencias, realización de conjeturas e inferencias lógicas, relacionadas directamente con el modo de operar con los conceptos, teoremas y procedimientos geométricos. Estas se perfeccionan a medida en que puedan ser utilizadas en la diversidad de condiciones de cada problema geométrico a cuya resolución el estudiante se enfrenta.

En consonancia con Ferrer (2000), la habilidad resolver problemas geométricos, tanto de la planimetría como de la estereometría, se estructura a través de las habilidades geométricas básicas y estas a su vez de las elementales y se perfecciona a medida en que las básicas alcancen un nivel superior de desarrollo. Por ello, las habilidades del pensamiento geométrico espacial son consideradas habilidades geométricas elementales, que el estudiante de la educación preuniversitaria debe asimilar para resolver con éxito problemas de cálculo, demostración y determinación geométrica.

Es a través de la ejecución de las habilidades que el estudiante realiza una visualización bidimensional y tridimensional del o de los objetos geométricos, sobre el que recae la acción específica, a partir del tipo de problema geométrico a resolver, identifica conceptos, teoremas, fórmulas relacionados con los mismos, realiza esbozos, los imagina en posiciones diferentes, realiza procesos de análisis y síntesis, ordenamiento, clasificación de esos objetos a partir de lo que identifica, observa, establece relaciones e inferencias lógicas, deduce consecuencias, descubre nuevas relaciones, que le permiten encontrar, descubrir una o varias vías de solución al problema en cuestión y determinar la más racional. En ese proceso, el estudiante utiliza

conceptos, teoremas, propiedades y desarrolla procedimientos algorítmicos, heurísticos, así como habilidades del pensamiento lógico-deductivo.

Por tanto, se define como habilidades del pensamiento geométrico espacial a aquellas habilidades geométricas elementales, a través de las cuales el estudiante en el proceso de resolución de problemas geométricos opera con los conceptos, teoremas y procedimientos geométricos que le permitan descubrir los medios y métodos para calcular magnitudes geométricas, para demostrar proposiciones geométricas y para determinar objetos, lugares geométricos, relaciones y posiciones en figuras geométricas y entre figuras geométricas.

Como habilidades del pensamiento geométrico espacial se proponen las siguientes:

Habilidades del nivel visualización, identificación y representación de objetos geométricos.

- Identificar las figuras planas y espaciales que conforman un objeto geométrico en el espacio.
- Describir el aspecto físico de un objeto geométrico.
- Identificar un objeto geométrico representado en diferentes vistas.
- Representar un objeto geométrico tridimensional en lo bidimensional.
- Representar un objeto geométrico en diferentes vistas.
- Identificar conceptos, teoremas y fórmulas, relacionados con los objetos geométricos.
- Reproducir la definición de los conceptos, la formulación de los teoremas y las fórmulas, relacionados con los objetos geométricos.

Habilidades del nivel de análisis – síntesis, de razonamiento deductivo y de rigor.

- Determinar relaciones espaciales entre las figuras geométricas planas, entre las espaciales y entre las planas y las espaciales que conforman un objeto geométrico.
- Establecer relaciones entre las definiciones de los conceptos, las formulaciones de los teoremas y los procedimientos geométricos asociados a objetos geométricos.
- Deducir consecuencias de las relaciones entre las definiciones de los conceptos, las formulaciones de los teoremas y los procedimientos geométricos asociados a objetos geométricos.

- Descubrir propiedades de las figuras planas y geométricas que conforman un objeto geométrico y del propio objeto geométrico.

Operaciones de las habilidades para el desarrollo del pensamiento geométrico espacial.

Para desarrollar una habilidad el hombre precisa de la ejecución de un sistema de operaciones, que constituyen aquellas ejecuciones de la actuación que se llevan a cabo como componentes de dicha habilidad, sin que posean un fin consciente por sí mismas. Estas acciones son resultado de la transformación de una habilidad anterior en operación, debido al dominio alcanzado en la misma, lo cual permite una menor participación de la conciencia, al no necesitar la concentración de la atención del hombre en la obtención de un objetivo parcial. Es necesario destacar también, que una misma habilidad puede estar formada por diferentes operaciones y una misma operación puede formar parte de diferentes habilidades. (Barreras, 1997)

Teniendo en cuenta lo anterior se precisa las operaciones que el estudiante del preuniversitario debe ejecutar para desarrollar cada una de las habilidades del pensamiento geométrico espacial, precisadas en el epígrafe anterior.

Habilidad: Identificar las figuras planas y espaciales que conforman un objeto geométrico en el espacio.

Operaciones:

- Observar el objeto geométrico en su totalidad.
- Observar cada figura plana y espacial que conforman al objeto geométrico.
- Establecer relaciones entre cada figura observada con su concepto correspondiente.

Habilidad: Describir el aspecto físico de un objeto geométrico.

Operaciones:

- Observar el objeto geométrico.
- Elaborar un plan para la descripción, teniendo en cuenta las figuras planas y espaciales que lo conforman, sus definiciones y propiedades.

- Reproducir las características físicas del objeto siguiendo el plan elaborado.

Habilidad: Representar un objeto geométrico tridimensional en lo bidimensional.

Operaciones:

- Observar el objeto geométrico a representar.
- Identificar el objeto geométrico a representar.
- Identificar las figuras planas que conforman el objeto geométrico a representar.
- Seleccionar la vista para representar (frontal o lateral).
- Determinar cuáles de las figuras planas identificadas alteran sus formas y cuáles las mantienen, de acuerdo a la vista seleccionada.
- Determinar las partes que estarán visibles y las que no estarán visibles en la representación.
- Realizar un esbozo preliminar del objeto geométrico.
- Comparar el esbozo preliminar con el objeto real.
- Realizar el esbozo definitivo.

Habilidad: Identificar un objeto geométrico representado en diferentes vistas.

Operaciones:

- Observar las diferentes vistas en que está representado el objeto.
- Identificar cada una de las figuras planas que conforman el objeto en cada una de las vistas.
- Determinar, a partir de las figuras, los rasgos esenciales del objeto geométrico.
- Establecer relaciones entre los rasgos esenciales determinados y el concepto del objeto geométrico.

Habilidad: Representar un objeto geométrico en diferentes vistas.

Operaciones:

- Identificar el objeto geométrico representado en sus diferentes vistas.

- Determinar las partes que estarán visibles y las que no estarán visibles en la representación.
- Realizar un esbozo preliminar del objeto geométrico.
- Comparar el esbozo preliminar con el objeto real.
- Realizar el esbozo definitivo.

Habilidad: Identificar conceptos, teoremas y fórmulas, relacionados con los objetos geométricos.

Operaciones:

- Observar el objeto geométrico.
- Identificar el concepto relacionado con el objeto geométrico.
- Identificar los teoremas y fórmulas relacionadas con el concepto de ese objeto geométrico.
- Identificar los conceptos de las figuras planas y espaciales que conforman el objeto geométrico.
- Identificar los teoremas y fórmulas relacionadas con los conceptos de las figuras planas y espaciales que conforman el objeto geométrico.

Habilidad: Reproducir la definición de los conceptos, la formulación de los teoremas y las fórmulas, relacionados con los objetos geométricos.

Operaciones:

- Identificar conceptos, teoremas y fórmulas, relacionados con los objetos geométricos.
- Definir los conceptos relacionadas con los conceptos de las figuras planas y espaciales que conforman el objeto geométrico y el objeto geométrico en sí.
- Formular los teoremas relacionadas con los conceptos de las figuras planas y espaciales que conforman el objeto geométrico y el objeto geométrico en sí.
- Escribir las fórmulas relacionadas con los conceptos de las figuras planas y espaciales que conforman el objeto geométrico y el objeto geométrico en sí.

Habilidad: Determinar relaciones espaciales entre las figuras geométricas planas, entre las espaciales y entre las planas y las espaciales que conforman un objeto geométrico.

Operaciones:

- Identificar las figuras planas y espaciales que conforman el objeto geométrico en el espacio.
- Describir el aspecto físico del objeto geométrico.
- Representar el objeto geométrico tridimensional en lo bidimensional.
- Identificar el objeto geométrico representado en diferentes vistas.
- Representar el objeto geométrico en diferentes vistas.
- Comparar entre sí cada una de las figuras planas y espaciales que conforman un objeto geométrico.
- Identificar relaciones de paralelismo, perpendicularidad entre las figuras geométricas planas, entre las espaciales y entre las planas y las espaciales que conforman un objeto geométrico.
- Identificar relaciones de igualdad y semejanza entre las figuras geométricas planas, entre las espaciales y entre las planas y las espaciales que conforman un objeto geométrico.
- Exponer ordenadamente las relaciones encontradas.

Habilidad: Establecer relaciones entre las definiciones de los conceptos, las formulaciones de los teoremas y los procedimientos geométricos asociados a objetos geométricos.

Operaciones:

- Identificar conceptos, teoremas y fórmulas, relacionados con el objeto geométrico.
- Reproducir la definición de los conceptos, la formulación de los teoremas y las fórmulas, relacionados con el objeto geométrico.
- Identificar relaciones lógicas entre los rasgos esenciales de las definiciones de los conceptos asociados al objeto geométrico.

- Identificar relaciones lógicas entre las formulaciones de los teoremas asociados al objeto geométrico.
- Identificar relaciones lógicas entre los procedimientos geométricos asociados al objeto geométrico.
- Identificar relaciones lógicas entre los rasgos esenciales de las definiciones de los conceptos, las formulaciones de los teoremas y los procedimientos geométricos asociados al objeto geométrico.
- Exponer ordenadamente las relaciones encontradas.

Habilidad: Deducir consecuencias de las relaciones entre las definiciones de los conceptos, las formulaciones de los teoremas y los procedimientos geométricos asociados a objetos geométricos.

Operaciones:

- Establecer relaciones entre las definiciones de los conceptos, las formulaciones de los teoremas y los procedimientos geométricos asociados a objetos geométricos.
- Realizar inferencias lógicas de las relaciones que se establecen entre las definiciones de los conceptos, las formulaciones de los teoremas y los procedimientos geométricos asociados a objetos geométricos.
- Determinar lo esencial entre las inferencias lógicas realizadas entre las definiciones de los conceptos, las formulaciones de los teoremas y los procedimientos geométricos asociados a objetos geométricos.
- Formular las consecuencias que se deducen de lo esencial entre las inferencias lógicas realizadas.

Habilidad: Descubrir propiedades de las figuras planas y geométricas que conforman un objeto geométrico y del propio objeto geométrico.

Operaciones:

- Determinar relaciones espaciales entre las figuras geométricas planas, entre las espaciales y entre las planas y las espaciales que conforman un objeto geométrico.
- Establecer relaciones entre las definiciones de los conceptos, las formulaciones de los teoremas y los procedimientos geométricos asociados a objetos geométricos.
- Deducir consecuencias de las relaciones entre las definiciones de los conceptos, las formulaciones de los teoremas y los procedimientos geométricos asociados a objetos geométricos.
- Inferir nuevas relaciones entre las consecuencias deducidas, entre estas y las relaciones determinadas y establecidas entre las definiciones de los conceptos, las formulaciones de los teoremas y los procedimientos geométricos asociado al objeto geométrico.
- Formular las nuevas relaciones inferidas.

A partir de las operaciones que conforman cada una de las habilidades del pensamiento geométrico espacial definidas anteriormente se demuestra su carácter sistémico, pues se evidencian relaciones de coordinación y subordinación. Las relaciones de coordinación se manifiestan en que estas habilidades no se pueden desarrollar de manera aislada, cada una independiente de la otra, pues unas con otras se complementan, se enriquecen, se profundizan, se sistematizan. Las relaciones de subordinación se manifiestan en que un estudiante no puede lograr el desarrollo de las habilidades del nivel de análisis – síntesis, de razonamiento deductivo y de rigor, sin antes no tener suficientemente desarrolladas las habilidades del nivel anterior, es decir, las habilidades del nivel de visualización, identificación y representación de objetos geométricos.

Sobre la base de las habilidades del pensamiento geométrico espacial, precisadas en este epígrafe, y de sus operaciones, se construye la metodología para su aplicación y desarrollo en los estudiantes de la educación preuniversitaria.

2.3. Metodología para la conducción por los profesores de preuniversitario del proceso de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial.

La metodología para la conducción por los profesores de preuniversitario del proceso de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial, se concibe como una orientación teórica y metodológica, que sustentada en el enfoque desarrollador, posibilite el establecimiento de procedimientos desarrolladores, que se dinamicen a través de eslabones, componentes, acciones y orientaciones metodológicas por eslabones, con el fin de lograr la preparación del profesor de Matemática de la educación preuniversitaria en la conducción del proceso de desarrollo de estas habilidades.

En correspondencia con lo anterior, se hace necesario explicar en qué consisten los procedimientos desarrolladores para el desarrollo del pensamiento geométrico espacial.

2.3.1. Procedimientos desarrolladores para conducir el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial.

Desde el punto de vista didáctico, los procedimientos son definidos en la literatura científica como un sistema de acciones ordenadas para instrumentar vías, alternativas, estrategias, que contribuyan al perfeccionamiento del proceso de enseñanza-aprendizaje. Tienen como propósito orientar las etapas didácticas a seguir en este, con un carácter flexible y contextualizado que asegure la construcción del aprendizaje significativo (Rodríguez, 2008).

Estos procedimientos se consideran desarrolladores, pues reflejan los principios planteados para la enseñanza y el aprendizaje desarrollador, de manera que estimulen el desarrollo intelectual, el aprendizaje y ofrezcan vías para que el proceso de búsqueda, construcción y asimilación del conocimiento de la geometría del espacio, lo que le permite al estudiante trazarse estrategias de trabajo para resolver problemas geométricos de la estereometría, sobre la base del desarrollo de su pensamiento geométrico espacial.

Procedimientos desarrolladores para el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial.

Al tener como sustento el enfoque desarrollador para la determinación de estos procedimientos, se parte del análisis de la lógica aproximada que sigue el estudiante para buscar la vía de solución de un problema geométrico de la estereometría.

Primeramente el alumno debe hacer una lectura analítica del problema para comprender de qué trata , para precisar sus condiciones y exigencias, identificar las figuras planas o cuerpos geométricos explícitos en el texto y/o figura auxiliar (si forma parte del texto), construir cuando sea necesario las figuras planas o cuerpos geométricos dados en las condiciones y exigencias, extraer la información que aportan los datos, en las condiciones y en las exigencias, mediante la definición de conceptos y la formulación de teoremas, propiedades y fórmulas vinculadas a estos.

A continuación, el estudiante, atendiendo a las exigencias del problema, comienza a establecer relaciones lógicas entre los conceptos, propiedades, fórmulas y a deducir consecuencias, que pueden ser el descubrimiento de otros conceptos, propiedades, fórmulas y, por ende, tenga que definirlos, formularlos y establecer nuevas relaciones entre ellos, hasta obtener un conjunto de relaciones necesarias y suficientes que lo conduzcan a cumplir con la exigencia del problema y que le permita elaborar posibles planes de solución. Se ha de destacar que en la búsqueda de las relaciones, unas se relacionan con otras y de este proceso se deducen otras, es un proceso necesario, que debe ser aprendido por los estudiantes.

Por último, el estudiante debe experimentar y demostrar que el o los planes de solución, por él trazados, conducen de las condiciones a las exigencias del problema, de esa forma, decidir cuál es el plan de solución que asumirá definitivamente para resolver el problema.

En ese proceso de experimentación, puede suceder que el o los planes no conduzcan a la solución del problema; en este caso, se valora si este ha sido correctamente elaborado, si le falta o sobra algún paso, si los pasos están lógicamente ordenados, si es necesario, perfeccionarlos; se

revisa, reconsidera, perfecciona o rechaza la estrategia de trabajo, seguida en la solución del problema, culminando este proceso cuando se llegue a lo exigido en el problema.

Atendiendo a lo descrito anteriormente se proponen cinco procedimientos:

- Reconocimiento visual del cuerpo geométrico como un todo y de las figuras geométricas como partes que lo componen.
- Extracción de información del cuerpo geométrico como un todo y de las figuras geométricas como partes que lo componen.
- Establecimiento de relaciones entre el cuerpo geométrico como un todo y entre las figuras geométricas como partes que lo componen.
- Deducción de las consecuencias de las relaciones entre el cuerpo geométrico como un todo y entre las figuras geométricas como partes que lo componen.
- Búsqueda de las relaciones necesarias y suficientes para elaborar un plan de solución definitivo para resolver el problema.

A continuación se explica en qué consiste cada uno de estos procedimientos:

Procedimiento: reconocimiento visual del cuerpo geométrico como un todo y de las figuras geométricas como partes que lo componen.

Consiste en que a partir de la lectura analítica que realice el estudiante de las condiciones y exigencias del problema geométrico, este sea capaz de:

- Observar, describir, identificar el cuerpo geométrico que se da como un todo, así como las figuras geométricas tanto planas como espaciales que lo conforman como sus partes integrantes.
- Representar sobre lo bidimensional el cuerpo geométrico visto desde diferentes ángulos, así como la forma real de las figuras geométricas tanto planas como espaciales que se identifican como partes del mismo, tanto en su superficie, como desde esta hacia el interior o hacia el exterior de este.

Procedimiento: extracción de información del cuerpo geométrico como un todo y de las figuras geométricas como partes que lo componen.

Sobre la base de los resultados de la aplicación del procedimiento anterior, el estudiante sea capaz de:

- Formular las definiciones de los conceptos asociados al cuerpo geométrico que se da como un todo, así como de las figuras geométricas tanto planas como espaciales que lo conforman como sus partes integrantes.
- Formular los teoremas asociados al cuerpo geométrico que se da como un todo, así como a las figuras geométricas tanto planas como espaciales que lo conforman como sus partes integrantes.
- Precisar las definiciones y teoremas que más se correspondan con las condiciones y exigencias del problema.

Procedimiento: establecimiento de relaciones entre el cuerpo geométrico como un todo y entre las figuras geométricas como partes que lo componen.

Una vez se haya realizado un reconocimiento visual y se hayan extraído las informaciones necesarias del cuerpo y de las figuras geométricas que lo conforman, el estudiante deberá:

- Relacionar las informaciones extraídas de los conceptos.
- Relacionar las informaciones extraídas de los teoremas.
- Relacionar las informaciones extraídas de los conceptos y de los teoremas.

Procedimiento: deducción de las consecuencias de las relaciones entre el cuerpo geométrico como un todo y entre las figuras geométricas como partes que lo componen.

Con la aplicación de este procedimiento el estudiante tiene que lograr:

- Buscar, descubrir, de las relaciones extraídas entre los conceptos, entre los teoremas y entre estos, nuevas condiciones o exigencias (un nuevo cuerpo geométrico, una nueva figura plana, un concepto, un teorema, es decir un nuevo dato) que no se dan explícitamente en el problema, que pueden tener relación estrecha o no con la posible vía de solución.

- Extraer información de estos datos, relacionarlos y deducir otras consecuencias.

Procedimiento: búsqueda de las relaciones necesarias y suficientes para elaborar un plan de solución definitivo para resolver el problema.

Este procedimiento consiste en que el estudiante logre:

- Precisar las exigencias del problema.
- Pensar en una posible vía de solución o en varias vías posibles para llegar a las exigencias del problema.
- Determinar, de todas las informaciones extraídas, las relaciones entre estas y de las consecuencias derivadas, aquellas que se relacionen con cada posible vía de solución pensada y que se consideren sean necesarias y suficientes para su ejecución.
- Elaborar un plan de solución para resolver el problema.

Los procedimientos desarrolladores descritos exigen de la explicación de cómo estos se desarrollan en el tratamiento de las habilidades del pensamiento geométrico espacial y cuáles orientaciones metodológicas concretas ofrecer al profesor para que pueda adecuarlas a las condiciones específicas del contenido geométrico a tratar y del diagnóstico realizado a sus estudiantes. Ello será explicado a través de los eslabones y componentes en los que se estructura la metodología para el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial en los estudiantes de la educación preuniversitaria.

2.3.2. Eslabones y componentes de la metodología.

La metodología para el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial se estructura en los siguientes eslabones y componentes:

- **Eslabón de diagnóstico de las necesidades cognoscitivas de los estudiantes**, que tiene por objetivo diagnosticar el nivel de conocimientos y el nivel de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial que poseen los estudiantes para resolver problemas geométricos de la estereometría de forma individual y colectiva. Este se estructura en dos componentes: el diagnóstico de trabajo individual y el diagnóstico de trabajo en colectivo.

- **Eslabón de preparación para el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial**, que tiene como objetivo el de preparar y entrenar al estudiante en las acciones que son necesarias ejecutar para desarrollar las habilidades del pensamiento geométrico espacial a través de la resolución de ejercicios y problemas geométricos. Se estructura en dos componentes: preparación motivacional–afectiva y preparación cognitivo-instrumental.
- **Eslabón de aplicación de las habilidades del pensamiento geométrico espacial**, que tiene por objetivo que los estudiantes perfeccionen la ejecución de estas habilidades en la resolución de problemas geométricos de la estereometría. Consta de los componentes: aplicación a problemas de exigencias determinísticas y aplicación a problemas de exigencias no determinísticas.
- **Eslabón de evaluación del desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial**, que está presente en todo el proceso de desarrollo de estas habilidades, cuyo objetivo es que el profesor controle el nivel que van alcanzando los estudiantes en este proceso, que le permita bridar los niveles de ayuda necesarios para corregir, orientar y guiar su proceder y, al mismo tiempo, que el estudiante se autoevalúe y evalúe el proceder de sus compañeros con el propósito de reconocer sus limitaciones y las acciones que deben seguir para alcanzar resultados superiores. Son componentes de este eslabón: evaluación cognitiva y evaluación metacognitiva.

Eslabón de diagnóstico de las necesidades cognoscitivas de los estudiantes.

El diagnóstico de las necesidades cognoscitivas de los estudiantes es un eslabón necesario para la conducción del proceso de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial, pues del conocimiento de las limitaciones y potencialidades que tengan los estudiantes en la aplicación de estas en la resolución de problemas geométricos de la estereometría, depende en gran medida de la calidad de su aprendizaje, que debe manifestarse en las formas y modos de actuar de estos para planificar, organizar, ejecutar y controlar sus acciones para resolverlos de forma colectiva e individual.

A través de este diagnóstico se determina la situación actual de:

- los conocimientos y habilidades del pensamiento geométrico espacial precedentes que cada estudiante debe haber asimilado de enseñanzas o grados anteriores, así como las formas y modos de actuar, estrategias de trabajo que domina para resolver de forma individual estos tipos de problemas y su actitud para resolver problemas y hacia el aprendizaje de la geometría del espacio (componente de diagnóstico de trabajo individual);
- las limitaciones y potencialidades que manifiestan los estudiantes en el trabajo en colectivo, principalmente en equipos (componente de diagnóstico de trabajo en colectivo).

Componente de diagnóstico de trabajo individual

Para aplicar el diagnóstico de las necesidades cognoscitivas, el colectivo de profesores de Matemática del grado, debe seguir las siguientes **acciones metodológicas**:

1. Precisar los conocimientos, habilidades y procederes precedentes que debe dominar el estudiante.
2. Aplicar instrumentos de diagnóstico, que permitan no solo diagnosticar contenidos sino también potencialidades y actitudes ante el aprendizaje de la Matemática.
3. Procesar la información derivada de los resultados de la aplicación de los instrumentos de diagnóstico.
4. Socializar con cada estudiante y con el grupo los resultados del diagnóstico y trazar estrategias para su corrección.

Componente de diagnóstico de trabajo en colectivo

Las **acciones metodológicas** que debe ejecutar el colectivo de profesores de Matemática son las siguientes:

1. Organizar a los estudiantes del grupo en equipos.
2. Seleccionar los problemas que se presentarán a los estudiantes para su resolución en equipo.
3. Preparar la guía de observación para evaluar el trabajo de los estudiantes en equipo.
4. Aplicar la guía de observación en la resolución por los equipos del problema planteado.
5. Procesar la información derivada de los resultados de la aplicación de la guía de observación.

6. Socializar con cada equipo las potencialidades y limitaciones que presentan para trabajar en colectivo.

Orientaciones metodológicas del eslabón:

Para instrumentar el diagnóstico de trabajo individual se debe realizar un estudio analítico de los programas de enseñanzas y grados que anteceden a la enseñanza que cursa el estudiante, con el fin de determinar los conceptos, los teoremas, los procedimientos geométricos de la geometría plana y del espacio y las habilidades del pensamiento geométrico espacial, que debe dominar el estudiante para estar en condiciones de asimilar el contenido de la geometría del espacio del grado.

En este sentido, no se debe perder de vista que con las habilidades del pensamiento geométrico espacial, están intrínsecamente relacionadas las habilidades del pensamiento lógico, por ello, se hace necesario también, tenerlas en cuenta.

Luego, se debe hacer un inventario de los conceptos, teoremas, procedimientos geométricos de la geometría plana y del espacio, así como de las habilidades del pensamiento geométrico espacial, se delimitan aquellos que se consideren esenciales, ya que a través de ellos se pueden diagnosticar los demás.

Para realizar el diagnóstico se debe elaborar una prueba pedagógica en la que se tenga en su cuestionario dos tipos de preguntas:

- Preguntas de carácter reproductivo, en la que el estudiante reproduce conocimientos, habilidades y procederes. Para ello, se pueden utilizar ítems o la integración de ítems de base común, de verdadero o falso, de selección simple y múltiple, de selección de la respuesta incorrecta y de completamiento de espacios en blanco para obtener una proposición verdadera.
- Preguntas de carácter productivo, donde el estudiante tenga que resolver un problema geométrico propiamente dicho.

Además, se planifica un encuentro conversatorio con el estudiante, donde este explique cómo procedió para resolver cada una de las preguntas de la prueba pedagógica, con el propósito de

conocer por qué motivos o causas no resolvió alguna, algunas o ninguna de ellas. Este momento es importante pues pudo haber preguntas que las resolvió mecánicamente sin reflexionar, sin pensar, por azar y otras que no resolvió, aunque pudo poseer los contenidos necesarios por cuestiones de estado de ánimo, motivación, interés, no comprensión de la tarea, u otra causal

También en este encuentro, se debe diagnosticar las potencialidades de los estudiantes para planificar, ejecutar y autocontrolar sus acciones, para reconocer, identificar y corregir sus errores en el proceso de solución de las tareas, para conocer su motivación por la Matemática y en especial por la geometría del espacio.

Para procesar los resultados del diagnóstico se elaboran tablas resumen en las que se recoge de cada estudiante del grupo, los conceptos, teoremas, procedimientos y el nivel de desarrollo de las habilidades evaluadas en el diagnóstico del pensamiento geométrico espacial, se tendrán en cuenta cuatro niveles: alto, medio, bajo y nulo.

La evaluación de los niveles de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial, se orienta realizarla a través de la operacionalización de esta variable, que se explica a continuación.

En primer lugar: para reconocer el nivel de desarrollo de tales habilidades en los estudiantes se tendrán las siguientes dimensiones, que se determinan a partir de los momentos del desarrollo de cualquier actividad: orientación, ejecución y control de la habilidad.

Para cada una de las dimensiones se precisan los siguientes indicadores.

Dimensión 1: Orientación en la habilidad.

Indicadores:

- 1.1. Identificación de la habilidad: consiste en reconocer, según la tarea planteada, la habilidad que debe ejecutar a partir de la lectura analítica que realiza de la tarea.
- 1.2. Conocimiento de la habilidad: consiste en el conocimiento que tenga de las operaciones de la habilidad.
- 1.3. Disponibilidad para realizar la habilidad: consiste en la necesidad y motivación que sienta por realizar la habilidad y la búsqueda de los medios y recursos que necesita para ello.

Dimensión 2: Ejecución de la habilidad.

Indicadores:

- 2.1. Ejecución consciente de las operaciones que conforman la habilidad: consiste en observar si el estudiante es capaz de desplegar las operaciones, de manera consciente, a través de un plan preconcebido para ello.
- 2.2. Rapidez en la ejecución de las operaciones que conforman la habilidad: consiste en el tiempo que utiliza el estudiante para la realización de las operaciones.
- 2.3. Calidad de la ejecución de las operaciones que conforman la habilidad: consiste en la forma con que realiza las operaciones para el logro exitoso del objetivo o finalidad de la habilidad que ejecuta.

Dimensión 3: Control de la habilidad.

Indicadores:

- 3.1. Valoración de la realización de cada una de las operaciones que conforman la habilidad: consiste en valorar de manera consciente que la realización de cada operación es correcta y cumple con la finalidad de su ejecución.
- 3.2. Identificación de los errores en la ejecución de la habilidad: consiste en reconocer los errores que cometió en la realización de las operaciones que conforman la habilidad.
- 3.3. Corrección de los errores en la ejecución de la habilidad: consiste en saber corregir los errores que cometió en la realización de las operaciones que conforman la habilidad.

Escalas de medición de los indicadores, dimensiones y del nivel de desarrollo de la habilidad:

La medición se realizará en el rango de 0 a 3 puntos. A cada indicador se le dará una puntuación dentro de ese rango: 0 significa el nivel nulo del indicador, 1 el nivel bajo, 2 el nivel medio y 3 el nivel alto. Cada dimensión y la variable se evaluará de la siguiente manera: de 0 a 0,9 es el nivel nulo; de 1 a 1,9 es el nivel bajo; de 2 a 2,8 es el nivel medio y de 2,8 a 3 es el nivel alto.

De las tablas resumen que realicen, se determina los conceptos, teoremas, procedimientos y habilidades en los que con mayor frecuencia presentan dificultades la mayoría de los estudiantes

para reactivarlos y tratarlos de manera explícita en las clases, así como aquellas muy puntuales en determinados estudiantes, que serán atendidas en el tratamiento a sus diferencias individuales. Para organizar a los estudiantes por equipos para la realización del diagnóstico de trabajo en colectivo, se toma en cuenta la entrega pedagógica realizada por enseñanzas o por el grado anterior y los resultados del diagnóstico de trabajo individual. En la composición de los equipos se selecciona como líder a un estudiante de alto rendimiento y como sus demás miembros a estudiantes de medio y bajo rendimiento, es decir, la composición es heterogénea.

Los equipos que se conformen deben oscilar entre cuatro y cinco estudiantes, para lograr un trabajo colectivo de mayor calidad y la composición de los mismos debe ser presentada al colectivo de estudiantes para su conocimiento e informarles la importancia y la necesidad de estos para aprender a resolver problemas en colectivo.

Como parte de la preparación y planificación del diagnóstico, el colectivo de profesores, con la guía del profesor del grupo, selecciona los problemas que se les van a plantear a los equipos, sobre la base de los conocimientos, habilidades y procederes precedentes, precisados para la realización del diagnóstico de trabajo individual.

Antes de la aplicación del diagnóstico, se prepara una guía de observación para evaluar el trabajo de los estudiantes en equipo, en la cual deben considerarse los siguientes indicadores:

- Actitud con que el equipo asume la tarea, es decir, si todos los miembros la asumen con el mismo agrado y disposición para realizarla, si se sienten motivados por su realización y si le prestan la debida atención.
- Manera en cómo el equipo organiza la realización de la tarea. En este caso, se observa cómo el líder del equipo distribuye, planifica y organiza el trabajo de sus miembros.
- Forma en cómo el equipo realiza la tarea. En este indicador se pretende observar cómo los estudiantes del equipo muestran responsabilidad en la realización de las tareas asignadas por su líder, la calidad de su ejecución, el control del trabajo del equipo por parte de su líder, constancia y perseverancia en su realización, consenso en la toma de decisiones acerca de la

posible vía de solución a la tarea, reconocimiento y corrección de los posibles errores que se comenten en su ejecución y la forma en cómo se discuten las soluciones en su seno.

Esta guía se aplica a continuación del proceso de resolución de los problemas que se plantee a cada uno de los equipos del grupo, con el fin de precisar las limitaciones y potencialidades de los estudiantes para trabajar en colectivo, las que se deben socializar con estos, en un ambiente de confianza, comprensión y respeto mutuo, momento sumamente importante para lograr la compenetración de sus miembros y de esta forma, lograr mayor unidad en el equipo.

Eslabón de preparación para el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial.

Los componentes en los que se estructura este eslabón, guardan una estrecha relación, pues no se realizan de manera independiente, aislado uno del otro, ambos se integran y complementan en el proceso de enseñanza – aprendizaje.

Componente de preparación motivacional-afectiva.

Se realizan las siguientes **acciones metodológicas**:

1. Plantear situaciones problémicas a través de las cuales los estudiantes comprendan la necesidad y utilidad que tienen para ellos, el dominio y asimilación de habilidades del pensamiento geométrico espacial en la resolución de problemas geométricos de la estereometría de carácter extra e intramatemático.
2. Demostrar a los estudiantes, a través de la resolución de problemas, que ellos pueden superar las limitaciones que se detectaron en el diagnóstico sobre sus necesidades cognoscitivas.
3. Crear un ambiente de respeto entre los estudiantes, a sus opiniones, a sus ideas, a la posibilidad de cometer errores y de recibir la ayuda necesaria por parte del profesor o de sus compañeros de clase o del equipo en el que está insertado.

Componente de preparación cognitivo-instrumental.

Acciones metodológicas:

1. Planificar y realizar clases de repaso, consultas colectivas e individuales para trabajar las dificultades detectadas en el diagnóstico de las necesidades cognoscitivas de los estudiantes.
2. Reactivar en cada clase los conceptos, teoremas y procedimientos previos esenciales, tanto para el tratamiento de un nuevo contenido, como para su consolidación.
3. Entrenar a los estudiantes, a través de la resolución de ejercicios y problemas, en la realización de los procedimientos desarrolladores para el tratamiento de las habilidades del pensamiento geométrico en ese proceso, en todas las clases que se planifiquen.

En las clases, para el planteamiento a los estudiantes de la situación o de las situaciones problemáticas, como vía de motivación y orientación hacia el objetivo, se deben tomar en cuenta las limitaciones y potencialidades detectadas en el diagnóstico, para no presentar una situación que los estudiantes no puedan analizar y determinar la contradicción entre lo conocido y lo desconocido.

Estas situaciones problemáticas pueden ser analizadas por equipos o individualmente, en dependencia de su complejidad. Cuando se planteen por equipos, el profesor va a facilitar un conjunto de orientaciones para que a partir de ellas, se guíen en el análisis. Estas orientaciones ayudan a que el análisis se realice mediante la ejecución de los procedimientos desarrolladores y de esta forma contribuir al tratamiento de las habilidades del pensamiento geométrico espacial. Luego, en la discusión de la situación problemática el profesor controlará cómo los equipos fueron consecuentes con ellas.

En el caso que estas se analicen de forma individual, el profesor después que el estudiante haya empleado un tiempo al análisis, mediante el método de conversación heurística, guía el pensamiento de los estudiantes en la realización de los procedimientos desarrolladores.

Por ejemplo, en la clase de tratamiento de nuevo contenido, relacionada con perpendicular, oblicua a un plano y el ángulo que forma la oblicua con el plano, después de reactivar la definición de perpendicular a un plano, el teorema que caracteriza cuándo una recta es

perpendicular a un plano, así como la definición de triángulo rectángulo, se puede plantear a los estudiantes la siguiente situación problémica:

En un parque de diversiones se quiere construir un local para video juegos que tenga forma de pirámide recta de base rectangular de 30 x 40 m. Si se quiere que las esquinas del local formen un ángulo de 60° con la base, ¿qué altura deberá tener el local?

En esta situación problémica, por su complejidad, el profesor debe solicitar su análisis por equipos, a los cuales facilitará las siguientes **orientaciones**:

1. Lee detenidamente el problema y extrae lo que se da como datos y lo que se pide determinar.
2. Haz en tu libreta un esbozo de la figura geométrica que se da en los datos y refleja en ella lo que se da y lo que se pide.
3. Representa en tu libreta esta figura vista de frente, de un lado y desde arriba.
4. Observa el esbozo de la figura geométrica realizado y la representación realizada desde las diferentes vistas e identifica todas las figuras geométricas que lo componen.
5. Representa en tu libreta la forma real de esas figuras geométricas.
6. Formula las definiciones de las figuras geométricas identificadas.
7. Si conoces teoremas o proposiciones o propiedades asociados a las figuras geométricas identificadas fórmalos.
8. Precisa las definiciones y teoremas, proposiciones o propiedades que consideres se ajustan más a lo que se da y lo que se pide en el problema.
9. Analiza cuáles son las relaciones que puedes establecer entre esas definiciones, teoremas, proposiciones o propiedades que te den una idea de cómo obtener lo que se te pide en el problema.

Con estas orientaciones se pretende que el estudiante se percate cuándo analiza lo que da y lo que se pide, hay conceptos relacionados con las esquinas y el ángulo que esta forma con la base de la pirámide que desconoce. Esto se puede aprovechar por el profesor para motivar el contenido de la clase y para orientar hacia su objetivo.

Las cinco primeras orientaciones se corresponden con el procedimiento de reconocimiento visual y se contribuye a familiarizar los estudiantes con las Habilidades del nivel visualización, identificación y representación de objetos geométricos. Las cuatro orientaciones restantes, se corresponden con los procedimientos de extracción de la información y establecimiento de relaciones y que contribuyen a la familiarización con las habilidades del nivel de análisis – síntesis, de razonamiento deductivo y de rigor.

En la discusión que realicen los equipos del análisis de la situación problemática, el profesor les demuestra a los estudiantes cómo pueden superar las limitaciones que presentan, mediante los niveles de ayuda que pueda ofrecer a los equipos y mediante la atención a las diferencias individuales. En ello, contribuye a la creación de un ambiente de respeto mutuo entre los integrantes del equipo, de confianza en sus posibilidades, la ayuda mutua que pueden ofrecer los unos a los otros, la perseverancia en la realización de las orientaciones, en la organización del trabajo en el equipo. De esta forma, se preparan desde el punto de vista motivacional-afectivo y cognitivo-instrumental, lo que demuestra la interrelación que existe entre los componentes de este eslabón.

En el caso de que la situación problemática sea analizada de forma individual, en su discusión, las orientaciones anteriores se realizan a través de la aplicación de procedimientos heurísticos, mediante la utilización del método de conversación heurística, es decir, los estudiantes las realizan a través del intercambio profesor – estudiante.

En las clases de repaso, las consultas colectivas e individuales, en las clases de tratamiento al nuevo contenido y en las de ejercitación de cada sistema de clases de una unidad, se debe explicar, ejercitar y sistematizar las orientaciones o los impulsos que se proponen en la tabla que aparece en el Anexo 5. Estos se les deben facilitar a los estudiantes durante el proceso de resolución de ejercicios y problemas, a través de los cuales se les prepare y entrene para realizar los procedimientos desarrolladores que llevan consigo el tratamiento de las habilidades del pensamiento geométrico espacial.

En las clases de tratamiento al nuevo contenido, como se analizó anteriormente, se debe entrenar a los estudiantes en la ejecución de tres de estos procedimientos, mediante el análisis de situaciones problemáticas. Este no es el único momento en que se utilizan ni son los únicos que se emplean, pues en la introducción de un nuevo concepto, un nuevo teorema, un nuevo procedimiento geométrico y en la propia resolución del problema presentado en la situación problemática, se deben utilizar los restantes procedimientos. En estos tipos de clases, la ejecución de los procedimientos es guiada por el profesor.

Uno de los aspectos importantes en la preparación de los estudiantes para el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico, está en la propuesta de tareas de aprendizaje que exijan para su ejecución, de la realización de acciones de los procedimientos desarrolladores a través de la resolución de ejercicios y problemas.

Estas tareas se van a clasificar sobre la base de las acciones de un procedimiento o de la integración de las acciones de dos o más procedimientos. Los tipos de tareas son:

- Tareas de definición y caracterización de un cuerpo geométrico y de sus figuras geométricas tanto planas como espaciales que lo conforman. En estos tipos de tareas se requiere de la observación, la descripción, la identificación de todas estas figuras, la formulación de definiciones y teoremas asociados. Se integran, por tanto, acciones del procedimiento de reconocimiento visual y de extracción de información.
- Tareas de construcción de cuerpos geométricos. En estos se requiere de la representación de este sobre lo dimensional visto desde diferentes ángulos y de la forma real del mismo y de las figuras geométricas que lo componen, de la identificación de estas figuras y formulación de sus definiciones. Se integran acciones del procedimiento de reconocimiento visual y de extracción de información.
- Tareas de deducción de consecuencias, en los que se debe identificar figuras geométricas, formular definiciones y teoremas asociados a estos, representar sobre lo dimensional el cuerpo y la forma real de las figuras que lo constituyen, relacionar informaciones entre

conceptos, entre teoremas y entre conceptos y teoremas, así como buscar y descubrir consecuencias que se derivan de estas relaciones. Se realizan acciones de los procedimientos reconocimiento visual, extracción de información, establecimiento de relaciones y deducción de consecuencias.

- Tareas de elaboración de vías de solución a problemas, en las que se integran todas las acciones de todos los procedimientos desarrolladores en la resolución de problemas geométricos de estereometría.

Estas tareas se pueden proponer tanto una independientemente de la otra como la integración de dos o más de ellas. Ejemplos de tales tareas se muestran en el Anexo 6.

Eslabón de aplicación de las habilidades del pensamiento geométrico espacial.

Una vez que los estudiantes estén preparados y entrenados en la realización de los procedimientos desarrolladores, mediante los cuales despliegan las habilidades del pensamiento geométrico espacial, se prosigue a su aplicación en la resolución de problemas, donde se minimiza las orientaciones e impulsos dados por el profesor, el trabajo individual y por equipos, convierte lo esencial en el aprendizaje de los estudiantes.

Esto no significa que no se atiendan las diferencias individuales, el trabajo que realiza cada estudiante y cada equipo, ni que en un momento determinado haya que remitirlos a las orientaciones que tienen en sus manos o que el profesor les facilite impulsos para guiar su pensamiento en el proceso de resolución de los problemas.

Componente de aplicación a problemas de exigencias determinísticas.

Se entiende por problema de exigencias determinísticas a aquellos problemas cuyas exigencias responden a la determinación de una magnitud (longitud de un segmento, amplitud de un ángulo, áreas, volúmenes), a la determinación o demostración de una relación de paralelismo, de perpendicularidad entre rectas, entre rectas y planos y entre planos.

Acciones metodológicas:

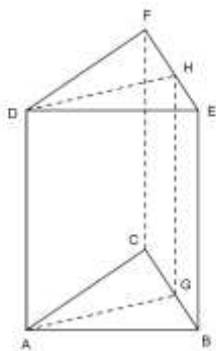
1. Seleccionar o elaborar el sistema de problemas de exigencias determinísticas que se van a plantear a los estudiantes en cada sistema de clases.
2. Precisar los problemas del sistema que se van a resolver de manera independiente y aquellos que se van a resolver por equipos.
3. Planificar en las clases dos momentos, uno en el que los estudiantes trabajen en la solución y el otro de discusión de las soluciones.

Componente de aplicación a problemas de exigencias no determinísticas.

Se entiende por problema de exigencias no determinísticas, a aquellos problemas cuyas exigencias responden a la búsqueda, investigación, descubrimiento de relaciones entre determinadas magnitudes que satisfagan una relación o la obtención de una magnitud bajo determinadas condiciones.

Un ejemplo de este tipo de problema es el siguiente:

En la figura se muestra el prisma recto ABCDEF de base triangular. ¿En qué posición debe estar el punto G sobre la arista \overline{BC} , para que el volumen del prisma recto ABGDEH y el volumen del prisma ABCDEF estén en la razón a:b?



Acciones metodológicas:

1. Planificar encuentros de conocimientos en el propio grupo de estudiantes o entre varios grupos de estudiantes.
2. Seleccionar o elaborar los problemas de exigencias no determinísticas que se plantearán a los estudiantes en esos encuentros de conocimientos.

3. Planificar dos momentos en el encuentro de conocimientos, uno de realización individual y otro de realización colectiva.
4. Establecer un tiempo límite para cada momento y de acuerdo al tiempo empleado asignar una puntuación para conocer los equipos del grupo o los grupos que quedan en los tres primeros lugares.

Orientaciones metodológicas:

En el componente de aplicación a **problemas determinísticos** el profesor debe seleccionarlos del libro de texto del grado o de grados anteriores, de otras fuentes bibliográficas, de software educativos o de las pruebas de ingreso a la educación superior, los que se organizarán según el contenido de cada sistema de clases. Es decir, para cada sistema de clases se selecciona un sistema de problemas, los que deben ser graduados y ordenados, según su grado de complejidad y dificultad. También algunos de estos problemas pueden ser elaborados por el profesor, los que deben ser revisados y aprobados por el colectivo de profesores del grado para evitar errores en su formulación o en su propia concepción.

De estos problemas, el profesor seleccionará aquellos que el estudiante pueda resolver por sí solo y los que se tengan que resolver por equipos, en dependencia de las posibilidades que tengan los para ello, de su preparación y nivel de entrenamiento que hayan logrado, del grado de complejidad y dificultad de los mismos.

Cuando se planteen problemas a los estudiantes tanto para su resolución individual como por equipos, se debe dar un tiempo prudencial para que trabajen de forma independiente, de manera que el profesor pueda controlar el proceder de los estudiantes y brindar orientaciones y niveles de ayuda, en caso de que haya dificultades y de esta forma, incentivarlos en su trabajo o corregir las funciones y el trabajo de ellos dentro del equipo.

Un momento importante, es el de discusión de las soluciones a los problemas, en este se puede emplear la técnica de la ponencia-oponencia. Esto permite que un estudiante o equipo exponga cómo solucionó el problema y otro estudiante u otro equipo o los demás estudiantes o demás

equipos, respectivamente, realicen preguntas, revelen y corrijan errores cometidos, den sugerencias sobre las acciones realizadas o sugieran otras vías de solución.

El componente de aplicación a **problemas de exigencias no determinísticas** es importante para desarrollar el carácter competitivo en los estudiantes, lo que los motiva por la actividad de resolución de problemas y contribuye a elevar la calidad de su aprendizaje.

Para ello, es necesaria la planificación de encuentros de conocimientos. Cuando estos se realicen en la propia clase, se ejecutarán entre los estudiantes del propio grupo. En el caso de que se realicen en horarios fuera de clase, se ejecutarán entre dos o más grupos del grado.

En ambos casos los problemas se deben seleccionar y elaborar por el colectivo de profesores del grado, de forma tal que se logre coherencia, claridad tanto en sus condiciones como en sus exigencias y evitar que así que se cometan errores de redacción y de concepción.

En estos encuentros de conocimientos se debe planificar un momento en que a los estudiantes se cuenten con un límite de tiempo para resolver inicialmente por equipos o por grupos, un problema de esta característica y se les asignará una puntuación de acuerdo a la parte de ese tiempo empleada y a la calidad de la solución, que no excederá los 50 puntos. Los restantes 50 puntos serán asignados al momento de elaboración individual, para el cual también se limitará el tiempo; esta puntuación se dosificará tanto para la calidad de la solución como para la parte del tiempo que haya empleado. Por ello, para cada momento, los profesores anotarán en la hoja que se asigne para la resolución del problema, el tiempo empleado.

Por el tiempo empleado se asignará hasta 10 puntos y por la calidad de la resolución hasta 40 puntos. Para cada momento se planteará un problema, el de mayor complejidad se asignará para su solución por equipos y el de menor complejidad para su resolución de forma individual. De la puntuación que se obtenga, el primer lugar se concederá al equipo o grupo de estudiantes que alcance de 90 a 100 puntos, el segundo lugar para el que alcance de 80 a 89,9 puntos y el tercer lugar para el que alcance de 70 a 79,9 puntos.

Eslabón de evaluación del desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial.

Este eslabón se realiza a medida que se ejecutan el resto de los eslabones para el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial. De manera implícita y explícita se ha hecho referencia a la evaluación tanto del proceso de desarrollo de estas habilidades como al nivel que van alcanzando los estudiantes en el mismo, es decir, al resultado.

A través de este eslabón se valorará el nivel de asimilación de los conocimientos, de las habilidades, los modos de actuar ante las tareas, su constancia y perseverancia en su realización, el colectivismo, la solidaridad, la camaradería, manifestada tanto en el trabajo individual como en el trabajo por equipos. Asimismo, se evaluará la forma en que reconocen sus errores y los corrigen, la forma en que controlan sus acciones para resolver un problema, la forma en que son capaces de saber lo que le falta para alcanzar el objetivo y de buscar los medios para hacerlo. Por ello, este eslabón se estructura en dos componentes: la evaluación cognitiva y la evaluación metacognitiva.

Componente de evaluación cognitiva.

Acciones metodológicas:

1. Realizar valoraciones sistemáticas de los avances, estancamientos y retrocesos de los estudiantes en el desarrollo de las habilidades, si se toma como punto de partida el diagnóstico de sus necesidades cognoscitivas y el seguimiento a través de todo el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática.
2. Elaborar estrategias de intervención educativa ante los estancamientos y retrocesos en el desarrollo de las habilidades.
3. Realizar encuentros de intercambio correctivo con estudiantes o con equipos de estudiantes que han presentado estancamientos y retrocesos en el desarrollo de sus habilidades.

Componente de evaluación metacognitiva

Acciones metodológicas:

1. Realizar en todas las clases y fuera de ellas intercambios orales con los estudiantes o con equipos de estudiantes para valorar sistemáticamente las estrategias metacognitivas que utilizan durante el proceso de resolución de problemas.
2. Guiar con sistematicidad a los estudiantes en el reconocimiento de sus potencialidades y limitaciones en el desarrollo de sus habilidades del pensamiento geométrico espacial, a través de la resolución de problemas.
3. Facilitar vías y estrategias para el autocontrol y corrección de sus procedimientos en el desarrollo de sus habilidades durante el proceso de resolución de problemas.

Orientaciones metodológicas:

En las orientaciones metodológicas para el eslabón de diagnóstico de las necesidades cognoscitivas de los estudiantes, se precisaron los indicadores para determinar las limitaciones y potencialidades del trabajo de los estudiantes por equipos, los que son válidos para determinar los avances, estancamientos y retrocesos de estos en el desarrollo de sus habilidades tanto desde lo cognitivo como de lo metacognitivo.

También, para medir el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial se establecieron cuatro niveles en ese primer eslabón, teniendo en cuenta las dimensiones e indicadores propuestos para ello. Estos se retoman para las valoraciones sistemáticas que deben realizar el profesor y el colectivo de profesores en la determinación de esos avances, estancamientos y retrocesos.

En los eslabones de preparación y aplicación se dieron orientaciones, niveles de ayudas e impulsos para guiar el pensamiento de los estudiantes en el proceso de resolución de problemas, a través del cual desarrollen sus habilidades del pensamiento geométrico espacial, los cuales se emplean como vías para ayudar a los estudiantes que están estancados o han retrocedidos en ese aspecto.

Se hace necesaria la intervención de todo el colectivo de profesores del grado en cuanto a la realización de observaciones sistemáticas a clases, no solo para ayudar a los profesores en la realización de las evaluaciones cognitivas y metacognitivas, sino para corregir dificultades que puedan manifestar en la conducción del desarrollo de las habilidades, con el propósito de ayudarlos desde el punto de vista teórico y metodológico y de esta forma que perfeccionen su accionar didáctico, ya que en ocasiones, un profesor de manera aislada no puede identificar en todos los estudiantes sus limitaciones y potencialidades.

Es importante en el proceso de valoración del aspecto cognitivo de los estudiantes, la realización de intercambios correctivos, para dar a conocer qué les falta para tener éxito, cómo pueden erradicar sus deficiencias, mostrar cómo pueden perfeccionar sus procedimientos y cómo pueden erradicar los errores que se comenten en el proceso de resolución de los problemas.

En este sentido, se deben elaborar estrategias de intervención educativa pues se puede encontrar estudiantes que presentan problemas de actitud ante el estudio, de desmotivación hacia la Matemática o hacia la escuela, problemas en el seno familiar, trastornos psicológicos, entre otros, que pueden estar incidiendo en la calidad de su aprendizaje. Entre las posibles acciones que se pueden realizar está la intervención del psicopedagogo de la escuela, de la familia, del colectivo de profesores del grado y de la dirección de la escuela.

Entre las acciones que se pueden realizar dentro de esa estrategia está la de dar participación a la familia en el intercambio correctivo con su hijo o hija, para que conozcan sus limitaciones y potencialidades y puedan ayudar al profesor en ese proceso correctivo. Se puede planificar a su vez escuelas de padres para orientar a la familia en las vías y acciones que pueden utilizar para ayudar a sus hijos en ese sentido.

Otra de las acciones que se puede ejecutar para motivar el estudio por la Matemática es la realización de encuentros de conocimientos y la creación de círculos de interés, a través de los cuales el estudiante se comprometa, se solidarice y se responsabilice con el resultado que pueda alcanzar su equipo o grupo en esas actividades.

Los intercambios orales con los estudiantes se realizan con el fin de que estos exterioricen su modo de actuar, los procedimientos y las estrategias de trabajo que han ejecutado en el proceso de resolución de problemas, lo que permite no solo valorar el nivel de desarrollo de sus habilidades sino también observar el autocontrol que realizan de su aprendizaje.

Un momento importante para realizar estas valoraciones desde lo cognitivo y lo metacognitivo es cuando se realiza la discusión de la resolución de ejercicios y problemas en las clases, con énfasis en las valoraciones que realizan del trabajo de unos y de otros, en un ambiente de respeto, confianza y ayuda mutua, que debe ser propiciado y estimulado por el profesor.

La guía del profesor para que los estudiantes reconozcan sus limitaciones y potencialidades debe ser sistemática y se materializará mediante la facilitación de orientaciones precisas para que estos aprendan a controlar sus acciones, procedimientos y estrategias de trabajo, en el proceso de resolución de los problemas. Además, incentivar la reflexión que deben realizar los estudiantes sobre la incidencia de sus acciones, procedimientos y estrategias del trabajo en el éxito o fracaso en la actividad, en cuanto a cuáles de ellas son las más y menos adecuadas para alcanzar el objetivo y así evitar cometer los mismos errores en la resolución de nuevos problemas.

Entre los eslabones de la metodología se establecen relaciones de subordinación y coordinación. La subordinación se manifiesta en el hecho de que la realización de un eslabón depende de la realización del anterior, por ejemplo no se puede pasar al eslabón de preparación si no se tiene un diagnóstico de las necesidades cognoscitivas de los estudiantes, puesto que sobre la base de este es que se pueden planificar y ejecutar sus acciones metodológicas. Asimismo sucede con el eslabón de aplicación, pues sus acciones metodológicas dependen de la preparación de los estudiantes en el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial.

Las relaciones de coordinación se manifiestan en el sentido de que los eslabones se interrelacionan, se complementan y enriquecen unos con otros. Por ejemplo, en los eslabones de diagnóstico, preparación y aplicación se realizan acciones metodológicas que complementan,

enriquecen las acciones metodológicas del eslabón de evaluación y viceversa, las acciones de este último eslabón se realizan a través de las acciones de los otros.

CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO 2

1. Las habilidades del pensamiento geométrico espacial constituyen la base de la construcción teórica de los procedimientos desarrolladores y de la metodología que se aporta; a su vez estos procedimientos constituyen el soporte didáctico esencial para el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial, que encuentran su concreción en la metodología.
2. En la metodología, la conducción por los profesores del proceso de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial en los estudiantes de la educación preuniversitaria, basado en el enfoque desarrollador, se efectúa a través de las relaciones entre los eslabones de diagnóstico de las necesidades cognoscitivas de los estudiantes, preparación, aplicación y evaluación del desarrollo de tales habilidades y su estructura se concreta en las relaciones entre los componentes que los conforman.
3. Las acciones y orientaciones metodológicas de los componentes de cada eslabón guían el accionar didáctico del colectivo de profesores en la instrumentación de la metodología en la práctica escolar para el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial.

CAPÍTULO 3.

VALORACIÓN DE LA PERTINENCIA Y FACTIBILIDAD DE LA METODOLOGÍA PARA LA CONDUCCIÓN DEL PROCESO DE DESARROLLO DE LAS HABILIDADES DEL PENSAMIENTO GEOMÉTRICO ESPACIAL

INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presentan los resultados de la implementación parcial en la práctica de la metodología para la conducción del proceso de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial, a través de un pre-experimento y se realiza la valoración de su factibilidad y pertinencia mediante el método criterio de expertos.

3.1. Implementación parcial en la práctica de la metodología para la conducción por los profesores del proceso de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial.

Para implementar en la práctica la metodología se escogió la Unidad 3 “Geometría del Espacio” del programa de la asignatura Matemática del duodécimo grado con un total de 35 horas clases y de esta la subunidad la temática “Geometría sintética del espacio” con un total de 20 horas clases, a la que le antecede la subunidad temática “Geometría plana”.

Como grupo de muestra se escogió al 12.1 grado del preuniversitario “Mártires del Porvenir”, del municipio “Diez de Octubre”, de la provincia La Habana, con una matrícula de 30 estudiantes.

Los objetivos que se pretenden alcanzar con el desarrollo de esta unidad son:

- 1) Identificar las propiedades que caracterizan y determinan un plano y aplicarlas al reconocimiento de planos y en la demostración de proposiciones sencillas.
- 2) Identificar y fundamentar la posición relativa de dos rectas en el espacio y aplicarla en la formulación y fundamentación de otras proposiciones y en la demostración de proposiciones geométricas sencillas y en el cálculo.

- 3) Reconocer y fundamentar la posición relativa entre una recta y un plano y entre dos planos.
Aplicar estas relaciones en formulación y fundamentación de otras proposiciones y en la demostración de proposiciones geométricas sencillas y en el cálculo.
- 4) Identificar los conceptos de perpendicularidad; oblicua y proyección de una oblicua sobre un plano y la relación entre las rectas perpendiculares y las oblicuas a un plano, aplicar estas relaciones al cálculo, la formulación y fundamentación de otras proposiciones geométricas y sus demostraciones.
- 5) Resolver y formular problemas en los que es necesario aplicar, de manera integradora, los conceptos, relaciones y procedimientos de la geometría plana, del espacio y la trigonometría en el cálculo de cuerpos geométricos.

La subunidad seleccionada comprende los siguientes conocimientos:

- Conceptos primarios de la geometría plana (punto, recta, plano).
- Axioma y teorema: hipótesis o premisas; tesis o conclusión; demostración, recíproco y contrarrecíproco.
- Espacio geométrico. Axiomas básicos de la geometría del espacio.
- Determinación de un plano por dos rectas que se cortan en un punto y su demostración.
Determinación de un plano.
- Posición relativa de dos rectas en el espacio.
- Paralelismo y perpendicularidad entre recta y plano. Definición de la distancia de un punto a un plano.
- Oblicua a un plano y su proyección sobre dicho plano. Ángulos entre rectas y planos y entre planos.
- Teorema de las tres perpendiculares y su recíproco.
- Aplicación de los conceptos, relaciones y procedimientos de la geometría del espacio en la resolución de problemas sobre la demostración de proposiciones y el cálculo geométrico en figuras y cuerpos.

Para el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial en la subunidad seleccionada, se realizó antes de iniciar la unidad, en la que ella se inserta, el diagnóstico de las necesidades cognoscitivas de los estudiantes para la que se aplicaron los instrumentos que aparecen en los Anexos 8 y 9, uno dirigido al diagnóstico de entrada y el otro dirigido al diagnóstico de salida.

En ambos instrumentos, fueron evaluadas todas las habilidades del pensamiento geométrico espacial, presentadas en el capítulo anterior.

Para medir la situación del desarrollo actual de estas habilidades, se utilizó los niveles y criterios aportados en la metodología en el eslabón de diagnóstico de las necesidades cognoscitivas de los estudiantes.

Para la elaboración de los instrumentos se precisaron los siguientes conocimientos y habilidades precedentes que debía dominar el estudiante.

- Conocimientos: triángulos, cuadriláteros, polígonos regulares, circunferencia y círculo, sus definiciones y propiedades, áreas y perímetros de triángulos, igualdad y semejanza de cuadriláteros, polígonos regulares, circunferencia y círculo; prisma recto, ortoedro, cubo, pirámide recta, cilindro circular recto, cono circular recto, esfera, sus definiciones y propiedades, áreas y volúmenes.
- Habilidades: identificar conceptos de figuras planas y de cuerpos geométricos; formular definiciones de conceptos de figuras planas y de cuerpos geométricos; formular teoremas asociados a figuras planas y cuerpos geométricos; calcular áreas y perímetros de figuras planas; calcular áreas y volúmenes de cuerpos geométricos; resolver triángulos.

Después de aplicados los instrumentos de diagnóstico, analizadas, tabuladas y procesadas cada una de las habilidades del pensamiento geométrico espacial por las dimensiones e indicadores presentados en el primer eslabón de la metodología se obtuvieron los siguientes resultados en cuanto a su nivel de desarrollo en los estudiantes muestreados:

Habilidades del pensamiento geométrico espacial	Cantidad de estudiantes por niveles de desarrollo			
	Nivel alto	Nivel medio	Nivel bajo	Nivel nulo
Identificar las figuras planas y espaciales que conforman un objeto geométrico en el espacio.	7	8	10	5
Describir el aspecto físico de un objeto geométrico.	6	5	4	15
Identificar un objeto geométrico representado en diferentes vistas.	6	4	2	18
Representar un objeto geométrico tridimensional en lo bidimensional.	8	6	10	4
Representar un objeto geométrico representado en diferentes vistas.	6	9	8	7
Identificar conceptos, teoremas y fórmulas, relacionados con los objetos geométricos.	7	7	10	6
Reproducir la definición de los conceptos, la formulación de los teoremas y las fórmulas, relacionados con los objetos geométricos.	6	7	5	12
Determinar relaciones espaciales entre las figuras geométricas planas, entre las espaciales y entre las planas y las espaciales que conforman un objeto geométrico.	5	8	4	13
Establecer relaciones entre las definiciones de los conceptos, las formulaciones de los teoremas y los procedimientos geométricos asociados a objetos geométricos.	4	9	3	14
Deducir consecuencias de las relaciones entre las definiciones de los conceptos, las formulaciones de los teoremas y los procedimientos geométricos asociados a objetos geométricos.	3	4	8	15
Descubrir propiedades de las figuras planas y geométricas que conforman un objeto geométrico y del propio objeto geométrico	1	2	9	18

A partir de la tabulación realizada de los resultados del diagnóstico, se constató que más del 50% de los estudiantes están en los niveles bajo y nulo. Esto justifica la necesidad de aplicar en el grupo seleccionado la metodología para el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial.

El contenido de la unidad se distribuyó como se muestra a continuación:

Clase 1: Conceptos primarios de la geometría plana (punto, recta, plano). Axioma y teorema: hipótesis o premisas; tesis o conclusión; demostración, recíproco y contrarrecíproco. Espacio

geométrico. Axiomas básicos de la geometría del espacio (clase de tratamiento del nuevo contenido).

Clase 2: Ejercicios sobre los axiomas básicos de la geometría del espacio (clase de ejercitación).

Clase 3: Determinación de un plano por dos rectas que se cortan en un punto y su demostración.

Determinación de un plano (clase de tratamiento del nuevo contenido).

Clases 4 y 5: Ejercicios sobre determinación de un plano (clases de ejercitación).

Clase 6: Posición relativa de dos rectas en el espacio. Paralelismo y perpendicularidad entre recta y plano. Definición de la distancia de un punto a un plano (clase de tratamiento del nuevo contenido).

Clases 7 y 8: Ejercicios sobre posiciones relativas entre rectas, entre planos y entre rectas y planos en el espacio (clases de ejercitación).

Clase 9: Oblicua a un plano y su proyección sobre dicho plano. Ángulos entre rectas y planos y entre planos (clase de tratamiento del nuevo contenido).

Clases 10 y 11: Ejercicios sobre oblicua a un plano y ángulo entre rectas y planos y entre planos (clases de ejercitación).

Clase 12: Teorema de las tres perpendiculares y su recíproco (clase de tratamiento del nuevo contenido).

Clases 13 y 14: Ejercicios sobre el teorema de las tres perpendiculares y su recíproco (clases de ejercitación).

Clases 15 – 20: Ejercicios de la unidad (clases de sistematización).

Las acciones metodológicas del eslabón de preparación para el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial se realizan al aprovechar los contenidos de la subunidad uno de esta unidad (con 12 horas clases), relacionados con la Geometría plana, para sistematizar los contenidos: relaciones de posición entre puntos y rectas y entre rectas; distancia de un punto a una recta; ángulos, relaciones entre pares de ángulo de acuerdo a sus amplitudes y la posición que ocupan; triángulos y los cuadriláteros; elementos y propiedades y relaciones métricas en la circunferencia y el círculo; igualdad y semejanza de figuras planas; grupo de teoremas de

Pitágoras y sus recíprocos; perímetro y área de figuras planas y resolución de triángulos cualesquiera.

En estas se realiza las acciones del componente de preparación cognitivo–instrumental, ya que se dosifican clases de repaso y sistematización, que contribuyen a trabajar sobre las dificultades detectadas en el diagnóstico y de esta forma reactivar de manera explícita los conceptos, teoremas y procedimientos previos para el tratamiento de los contenidos de la subunidad dos. Además, la reactivación de estos contenidos se realizó a través de la resolución de problemas con exigencias determinísticas, relacionadas con el cálculo en cuerpos geométricos, estudiados en grados anteriores.

Mediante la resolución de esos problemas, se comenzó el entrenamiento con los estudiantes en la realización de los procedimientos desarrolladores para el tratamiento de las habilidades del pensamiento geométrico espacial, lo cual fue apoyado con las orientaciones que aparecen en el Anexo 6. Estas orientaciones fueron facilitadas a cada estudiante de forma impresa, para que siempre las consultaran cuando estuvieran resolviendo los problemas que se les planteaban. El acompañamiento del profesor a los estudiantes en la ejecución de los procedimientos desarrolladores, a través de la resolución de problemas de la geometría del espacio, fue apoyado con los niveles de ayuda necesarios, mediante la aplicación del método de conversación heurística.

Por los resultados desfavorables constatados en el diagnóstico, en las primeras siete clases, se apeló al trabajo de los estudiantes por equipos. Ello favoreció el apoyo de los estudiantes de nivel alto y medio a los de los niveles bajo y nulo, así como a aprender a aprender de manera cooperada; se perfeccionó, con la ayuda e intervención del profesor, la distribución del trabajo en los equipos, la consecuente ejecución de las orientaciones dadas para la realización de los procedimientos desarrolladores. Las cinco últimas clases de esa subunidad temática propiciaron que los estudiantes trabajaran de manera individual, con la guía y el acompañamiento del profesor.

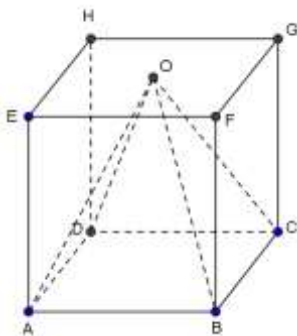
En todas estas clases, el momento de discusión de los problemas, permitió corregir modos de actuación incorrectos, perfeccionar estrategias de trabajo en la resolución de problemas, comprender y aprender los procedimientos heurísticos en los que deben apoyarse para resolver problemas, que los estudiantes exteriorizaran en sus proceder, se les ayudó a autovalorar sus acciones, se propició de esta forma, la realización de las acciones del eslabón de evaluación.

En la subunidad temática dos de los eslabones de la metodología se realizaron de la siguiente manera:

- Se seleccionó y elaboró problemas, como el que se presenta a continuación, para crear situaciones problémicas en cada una de las clases de tratamiento de nuevo contenido.

Problema (clase 1):

En la figura se tiene el cubo ABCDEFGH; O es el punto de intersección de las diagonales de la base superior. Si las aristas del cubo miden 4,0 cm, calcula el área lateral, total y el volumen de la figura geométrica ABCDO.



La situación problémica radica en la clasificación de la figura geométrica ABCDO, pues aunque el estudiante plantee que es una pirámide, el profesor crea un ambiente de dudas, en cuanto a cómo demostrar que las figuras ABO, BCO, CDO y ADO son planas. Ello permite que el estudiante se motive por el contenido de la clase, pues no tiene las herramientas necesarias para demostrarlo y se crea la contradicción entre lo conocido y lo desconocido. En este caso, la tarea docente está dirigida a demostrar que esas figuras son planas, para de esta forma confirmar que ABCDO es una pirámide.

Este problema permitió que se introdujeran los axiomas relacionados con la geometría del espacio, que aparecen en la página 109 del libro de texto de duodécimo grado, parte I. En el análisis, comprensión y resolución de este problema en la clase, se pidió a los estudiantes que se guiaran por las orientaciones que ellos poseían impresas, lo que permitió continuar con la preparación para el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial, al realizarse a través de ellas los procedimientos desarrolladores.

- En las clases dedicadas a la ejercitación, se continuó la preparación de los estudiantes para el desarrollo de las habilidades, se dio seguimiento al diagnóstico de sus necesidades cognoscitivas y se planificó tres encuentros de intercambio correctivo con estudiantes o con equipos de estudiantes que presentaron estancamientos y retrocesos en el desarrollo de sus habilidades.
- Se realizó una escuela de padres, dirigida a cómo debían apoyar a sus hijos en la identificación de los cuerpos geométricos que les rodeaban en su casa, en la calle, en las figuras planas que estaban en las caras de esos cuerpos geométricos, a supervisar la elaboración, por estos, de cuerpos geométricos asignados por el profesor como tarea para la casa, a cómo debían estudiar en equipos, pues también se asignaron tareas extractases para ser realizadas por equipos en las siete casas de estudio asignadas con el consentimiento y aprobación de los padres.
- Se realizaron cuatro preguntas escritas, dos de forma individual y dos para su realización en equipos, con el objetivo de controlar y evaluar el desarrollo de las habilidades y para el seguimiento del diagnóstico, lo que permitió trazar acciones correctivas por parte del profesor.
- En las seis clases de sistematización se realizó las acciones del eslabón de aplicación de las habilidades, en dos de ellas los estudiantes trabajaron por equipos y las restantes cuatro de forma individual, ya sin las orientaciones de los procedimientos desarrolladores, pero solo con problemas de exigencias determinísticas. En ocasiones se les facilitó ayuda a estudiantes y

equipos con dificultades, pero ya se comenzó a constatar la realización independiente de las tareas en 18 de ellos, lo que es un indicio de efectividad de la metodología.

- Se realizó dos encuentros de conocimientos en horarios fuera de las clases, con una duración de 45 minutos, 15 minutos dedicados a la resolución de un problema geométrico por equipos y 30 minutos a la resolución de manera individual de un problema. Ambos problemas fueron de exigencias no determinísticas.

En estos encuentros de conocimientos se pudo observar la disposición de los estudiantes por realizar los problemas, su motivación por la actividad, porque su equipo alcanzara uno de los tres primeros lugares. La mayoría de los padres acompañaron a sus hijos durante toda la actividad (estos fueron convocados a participar de manera voluntaria por el profesor), lo que propició que se comprometieran más con el resultado. Se evidenció un ambiente de competencia, de camaradería; los estudiantes días antes se reunieron en las casas de estudio y se prepararon por una guía de ejercicios facilitados por el profesor para que se entrenaran por equipos y contribuyera en su desempeño, tanto en lo colectivo como en lo individual.

De esta forma, se pudo demostrar a los profesores de Matemática del colectivo de grado la factibilidad y aplicabilidad de la metodología en la práctica escolar.

3.2. Valoración de la factibilidad y pertinencia de la metodología.

3.2.1. Valoración de la implementación de la metodología, a través de un pre-experimento.

En el presente epígrafe se muestra la valoración de la ejecución en la práctica de la metodología, se describe el pre-experimento y los principales resultados alcanzados.

Se parte de la hipótesis, que tiene como esencia, que la metodología para el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial, desde un enfoque desarrollador contribuirá a elevar el nivel de desarrollo de estas habilidades en los estudiantes de preuniversitario, la cual se pudo corroborar en la práctica.

El pre-experimento tuvo tres momentos fundamentales:

- **Primer momento**, se realizó la constatación inicial con el propósito de determinar el nivel actual de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial, a través de los instrumentos descritos en el epígrafe anterior.
- **Segundo momento**, se realizó la validación con el propósito de valorar si la metodología era viable y si la mayoría de los estudiantes alcanzaban niveles superiores en el desarrollo de las habilidades. Esto se fue comprobando en el desarrollo de las clases de la subunidad temática. Por último, se realizó una prueba de salida para comparar los resultados finales con los iniciales.
- **Tercer momento**, se procedió a realizar el análisis y procesamiento estadístico sobre el nivel de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial alcanzado por los estudiantes después de aplicada la metodología, atendiendo a las dimensiones e indicadores establecidos.

Diseño teórico-metodológico del pre-experimento:

Problema: Insuficiencias que manifiestan los estudiantes de duodécimo grado del preuniversitario “Mártires del Provenir” en cuanto al desarrollo de sus habilidades del pensamiento geométrico espacial.

Objetivo: Comprobar con la aplicación de la metodología los cambios significativos en el nivel de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial de los estudiantes.

Hipótesis de trabajo: la metodología para el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial contribuye a elevar el nivel de desarrollo de estas en los estudiantes del duodécimo grado, grupo uno, del preuniversitario “Mártires del Porvenir”.

Variable independiente: La metodología para el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial en los estudiantes de la educación preuniversitaria.

Variable dependiente: el nivel de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial que alcanzan los estudiantes del duodécimo grado, grupo uno, del preuniversitario “Mártires del Porvenir”.

Entre las **variables controladas** se encuentra: la disposición de los estudiantes para el aprendizaje de los contenidos geométricos de la estereometría y la aplicación del pre-experimento por el propio investigador que es profesor del grupo seleccionado.

El pre-experimento se aplicó a una **población** de 217 estudiantes del duodécimo grado y como **muestra**, participaron los 30 estudiantes del grupo 1 de este grado.

Métodos empleados:

Métodos teóricos: análisis y síntesis, para la interpretación de la información recopilada a partir de la aplicación de la metodología.

Métodos empíricos: la observación sistemática del proceso de enseñanza-aprendizaje durante la aplicación de la metodología, así como la prueba pedagógica para identificar las insuficiencias de los estudiantes en el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial.

Desarrollo del pre-experimento con las **siguientes tareas:**

1. Confección del diagnóstico inicial y final.
2. Aplicación del diagnóstico inicial. (Anexo 7)

Las dos primeras tareas fueron descritas en el epígrafe anterior. Los resultados del diagnóstico inicial también fueron presentados.

3. Aplicación de la metodología.
4. Realización de mediciones en las clases, para evaluar el nivel alcanzado por los estudiantes en el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial.
5. Aplicación del diagnóstico de salida. (Anexo 8)

La prueba pedagógica de salida permitió constatar el nivel de desarrollo de las habilidades alcanzado por los estudiantes después de aplicado el pre-experimento; los resultados se presentan en la siguiente tabla donde se muestran las habilidades y la cantidad de estudiantes que se encuentran en cada uno de los niveles de desarrollo utilizados para evaluar cada una de las habilidades.

Habilidades del pensamiento geométrico espacial	Cantidad de estudiantes por niveles de desarrollo			
	Nivel alto	Nivel medio	Nivel bajo	Nivel nulo
Identificar las figuras planas y espaciales que conforman un objeto geométrico en el espacio.	9	12	8	1
Describir el aspecto físico de un objeto geométrico.	10	8	10	2
Identificar un objeto geométrico representado en diferentes vistas.	8	10	10	2
Representar un objeto geométrico tridimensional en lo bidimensional.	11	11	6	2
Representar un objeto geométrico representado en diferentes vistas.	10	10	9	1
Identificar conceptos, teoremas y fórmulas, relacionados con los objetos geométricos.	13	12	4	1
Reproducir la definición de los conceptos, la formulación de los teoremas y las fórmulas, relacionados con los objetos geométricos.	8	10	9	3
Determinar relaciones espaciales entre las figuras geométricas planas, entre las espaciales y entre las planas y las espaciales que conforman un objeto geométrico.	10	9	5	6
Establecer relaciones entre las definiciones de los conceptos, las formulaciones de los teoremas y los procedimientos geométricos asociados a objetos geométricos.	9	7	6	8
Deducir consecuencias de las relaciones entre las definiciones de los conceptos, las formulaciones de los teoremas y los procedimientos geométricos asociados a objetos geométricos.	10	7	5	8
Descubrir propiedades de las figuras planas y geométricas que conforman un objeto geométrico y del propio objeto geométrico	8	8	10	4

6. Realización del procesamiento estadístico para corroborar la efectividad de la propuesta.

Se aplicó la prueba de hipótesis de prueba de signos, con el objetivo de constatar la evolución de los estudiantes en el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial.

Para ello, se elabora la tabla siguiente, donde se muestra el signo de cada una de las habilidades atendiendo en cada uno de los niveles de desarrollo.

Habilidades del pensamiento geométrico espacial	Cantidad de estudiantes por niveles de desarrollo			
	Nivel alto	Nivel medio	Nivel bajo	Nivel nulo
Identificar las figuras planas y espaciales que conforman un objeto geométrico en el espacio.	+	+	-	-
Describir el aspecto físico de un objeto geométrico.	+	+	-	-
Identificar un objeto geométrico representado en diferentes vistas.	+	+	+	-
Representar un objeto geométrico tridimensional en lo bidimensional.	+	+	-	-
Representar un objeto geométrico representado en diferentes vistas.	+	+	+	-
Identificar conceptos, teoremas y fórmulas, relacionados con los objetos geométricos.	+	+	-	-
Reproducir la definición de los conceptos, la formulación de los teoremas y las fórmulas, relacionados con los objetos geométricos.	+	+	+	-
Determinar relaciones espaciales entre las figuras geométricas planas, entre las espaciales y entre las planas y las espaciales que conforman un objeto geométrico.	+	+	+	-
Establecer relaciones entre las definiciones de los conceptos, las formulaciones de los teoremas y los procedimientos geométricos asociados a objetos geométricos.	+	-	+	-
Deducir consecuencias de las relaciones entre las definiciones de los conceptos, las formulaciones de los teoremas y los procedimientos geométricos asociados a objetos geométricos.	+	+	-	-
Descubrir propiedades de las figuras planas y geométricas que conforman un objeto geométrico y del propio objeto geométrico	+	+	+	-

Al aplicar los procedimientos para esta prueba de hipótesis se asume la siguiente hipótesis nula:

H₀: La metodología no propicia el cambio de niveles de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial en los estudiantes.

Hipótesis alternativa:

H₁: La metodología propicia el cambio de niveles de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial en los estudiantes.

Para aplicar la prueba de los signos y tomar una decisión, se asume como nivel de significación $\alpha = 0,01$. Para la definición de la región de rechazo, esta prueba estadística se compara con los valores de la distribución normal de probabilidades, que para $\alpha = 0,01$ es $Z \geq 2,33$.

El cálculo de Z , a partir del registro de datos para comparar con el valor crítico en la tabla de distribución normal de probabilidades, se realiza de acuerdo a la fórmula $Z = \frac{(x \pm 0,5) - \frac{1}{2}N}{\frac{1}{2}\sqrt{N}}$,

donde x es el número de cambios positivos, N el tamaño de la muestra, $(x - 0,5)$ se usa cuando $x > \frac{1}{2}N$, $(x + 0,5)$ se usa cuando $x < \frac{1}{2}N$. Como el número de cambios de signos $x = 27$ y $27 > 15$, entonces se utiliza la fórmula anterior para $(x + 0,5)$. De esta forma:

$$Z = \frac{(27 + 0,5) - 15}{2,74} = \frac{12,5}{2,74} \approx 4,56$$

Puesto que Z calculado es mayor que el valor crítico en la tabla de distribución normal, para el nivel de significación elegido, se rechaza la hipótesis nula, por lo que se puede inferir que la metodología aplicada propicia el cambio de niveles de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial en los estudiantes.

3.2.2. Valoración de la factibilidad de la metodología mediante el método criterio de expertos.

El criterio de expertos fue utilizado como instrumento para pronosticar la factibilidad de la metodología y el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial en los estudiantes de la educación preuniversitaria.

Para la selección de los posibles expertos se tomó una muestra de 38 profesionales, que abarcó profesores de los preuniversitarios del municipio Diez de Octubre, de La Habana, sobre la base de su actividad como especialista en la enseñanza de la Matemática, su experiencia en la enseñanza preuniversitaria, el nivel autocrítico, sus experiencias investigativas relacionadas con

la enseñanza de la Geometría en el preuniversitario, los cuales fueron contactados para conocer su disposición de colaborar en la investigación.

Se determinó el coeficiente de competencia de los expertos, mediante la aplicación de una encuesta (Anexos 9 y 10). Fueron seleccionados 30 especialistas, a los que se les entregó el instrumento para la valoración de los elementos y la estructura de la metodología (Anexo 9).

Se constató que los expertos tienen una significativa experiencia en la educación preuniversitaria, avalado por un promedio de más de 10 años como profesores de Matemática. El 100% de los encuestados ostentan el grado científico de doctor o el grado académico de máster.

Para la valoración sobre los principales elementos de la metodología propuesta se consideraron los siguientes indicadores:

1. Fundamentación teórica de la metodología.
2. Pertinencia de la precisión de las habilidades del pensamiento geométrico espacial.
3. Pertinencia de los procedimientos desarrolladores para el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial.
4. Estructura de la metodología (eslabones, componentes).
5. Pertinencia de las orientaciones metodológicas para cada uno de los eslabones de la metodología.
6. Pertinencia de la metodología para el objetivo propuesto.
7. Pertinencia de la metodología en el actual perfeccionamiento de los programas de Matemática en la educación preuniversitaria.

El análisis de los resultados obtenidos con la aplicación del método criterio de expertos muestra que los siete indicadores puestos a consideración fueron evaluados de muy adecuados (Anexo 11 y 12). De manera general los expertos ofrecieron las siguientes consideraciones:

- Los presupuestos teóricos que sustentan la metodología son muy adecuados, al mostrar una lógica en la conceptualización y estructuración de los eslabones y componentes para el desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial.

- La metodología posee un adecuado enfoque sistémico, dado en la evidente relación de coordinación y subordinación entre sus eslabones y componentes.
- Es pertinente la precisión de las habilidades del pensamiento geométrico espacial, así como la propuesta de procedimientos desarrolladores, a través de los cuales se contribuye al desarrollo de las habilidades. Además, reconocen que las orientaciones metodológicas dadas para cada eslabón orientan con precisión a los profesores en la aplicación de la metodología en la práctica escolar.
- En la metodología se concretan de forma muy adecuada los procedimientos desarrolladores para el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial y que es pertinente y viable en el proceso de perfeccionamiento que viene sucediendo en los programas de la educación preuniversitaria.

CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO 3

1. La metodología aportada constituye un instrumento esencial para el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura Matemática en la educación preuniversitaria y es una contribución a la teoría de la Didáctica de la Matemática.
2. La valoración cualitativa y cuantitativa, realizada a través de la aplicación de un pre-experimento, del criterio de expertos y el taller de socialización de los resultados de la investigación, permitió corroborar la consistencia teórica y práctica de la metodología, lo que demuestra la validez, factibilidad y necesidad de la aplicación de los resultados en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en la educación preuniversitaria.

CONCLUSIONES GENERALES

1. La caracterización epistemológica del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en la educación preuniversitaria y del proceso de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial, permiten precisar las inconsistencias teóricas y didácticas en cuanto a la ausencia de una metodología para el desarrollo de tales habilidades, que limita su tratamiento metodológico por parte de los profesores de Matemática de la mencionada educación.
2. El diagnóstico del estado actual del campo de la investigación revela insuficiencias en la preparación teórica y metodológica de los profesores de Matemática de la educación preuniversitaria para dar tratamiento metodológico al desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial.
3. La metodología propuesta se estructura en eslabones, componentes, acciones metodológicas para cada componente y orientaciones metodológicas para cada eslabón, que dirigen la preparación de los profesores de Matemática, desde lo teórico y lo didáctico, para el tratamiento metodológico al desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial mediante la realización de procedimientos desarrolladores para este fin, lo que favorece la asimilación de los contenidos de la geometría del espacio por los estudiantes.
4. Los resultados, en la implementación parcial en la práctica de la metodología, los criterios emitidos por los expertos corroboran la factibilidad de su aplicación en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en la educación preuniversitaria.

RECOMENDACIONES

1. Generalizar los aportes de la investigación y su instrumentación práctica, a través de la superación teórica y metodológica de los profesores de Matemática no solo de la educación preuniversitaria, sino de los profesores de educaciones precedentes.
2. Sistematizar los resultados de la investigación en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática y en las preparaciones metodológicas de los profesores de Matemática de la educación preuniversitaria.
3. Continuar profundizando en el estudio del proceso de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial, con el propósito de determinar nuevas regularidades en la concepción del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en la educación preuniversitaria.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. López A y González, V (2001) La técnica de Iadov: Una aplicación para el estudio, pág. 2
2. Rojas, V. (2006-2007) Modelo didáctico para favorecer la enseñanza aprendizaje de la geometría del espacio con un enfoque desarrollador, pp. 88-89
3. De Armas, N. (2011) Aproximación al estudio a la metodología como resultado científico, pp. 44-51
4. MINED, (1980), Seminario Nacional a dirigentes, pág. 48
5. MINED, (1987), Proyecto Matemática, pág. 3
6. MINED, (2015), Programas de Matemática para la educación preuniversitaria, pág.12
7. Castellanos, S. (2007), Aprender y Enseñar en la Escuela. Una concepción desarrolladora, p. 46
8. Castellanos, S. 2001, Hacia un aprendizaje desarrollador. Una concepción desarrolladora, p.95
9. Suero, F. 2001, Una propuesta metodológica que contribuya al mejoramiento de la enseñanza aprendizaje del Álgebra a través de la formación de conceptos, p.11
10. Jiménez, M. (2000,). Una concepción en la enseñanza de la matemática para propiciar el aprendizaje desarrollador. Resultado de investigación, p.6
11. Gibert, (2012,). Una alternativa didáctica para la estructuración del proceso de enseñanza-aprendizaje en las clases de la asignatura Matemática en la Educación Secundaria Básica, p. 27
12. Ballester, S. et al. (2007,) Metodología de la enseñanza de la Matemática, p.32
13. Feria et al., 2006,). Percepción espacial y geometría intuitiva. Una puerta de entrada al aprendizaje significativo de la geometría, p. 28
14. González, M. (2001,) Propuesta didáctica para la aplicación de la enseñanza basada en problemas a la formación semipresencial en la disciplina de geometría, p.117
15. Ferrer V. y Rebolgar M. (2007), La enseñanza basada en problemas y ejercicios p. 5

16. Sánchez, Guadarrama y Araujo, s.a, Lecciones de Filosofía Marxista-Leninista, p.22
17. De Armas, R (2003), Resultados científicos en la investigación educativa, p. 35
18. Silvestre, O y Zilberstein, T (2002), ¿Cómo hacer más eficiente el aprendizaje?, p. 35
19. Ferrer, V (2000), La resolución de problemas en la estructuración de un sistema de habilidades matemáticas en la escuela media cubana, p.58

BIBLIOGRAFÍA

- Acuña, C. (1995). La enseñanza de la Deducción y la Demostración en la Geometría del Bachillerato. Tesis defendida en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. ISP “Enrique José Varona”, La Habana. Cuba
- _____. (2008). Prototypes and learning of geometry a reflection on its pertinence and its causes / Claudia Acuña Soto, Víctor Larios Osorio. Center for research and advanced studies (CINVESTAV) of the IPN (national polytechnic institute), autonomous university of Querétaro (UAQ). ICMI 2008. Monterrey. México. [Consultado 15/10/2017]
- Acuña, C. y Larios, V. (2008). Prototypes and learning of geometry. A reflection om its pertinence and its causes. ICMEII. Plenary paper, Topic Study Group 20: Visualization in the teaching and learning of mathematics. Consultado el 16 de julio de 2016 desde <http://tsg.icmeII.org/document/get/193>
- Addine, F. (1998). Didáctica y optimización del proceso de enseñanza aprendizaje. La Habana: Pueblo y Educación.
- Addine, F., Recarey, F. y González, A. M. (2002). Principios para la dirección del proceso pedagógico. García G. En: compendio de Pedagogía. La Habana: Pueblo y Educación. p: 80-97.
- Addine, F., González, A. M. y Recarey, S. (2003). Principios para la dirección del proceso pedagógico. En: Compendio de Pedagogía. La Habana: Editorial Pueblo y Educación. pp. 80-101.
- Addine, F. (2004). Didáctica teoría y práctica. La Habana: Pueblo y Educación.
- Aguilar, R. e Iglesias, M. (2013). La Geometría de los Cuadriláteros en los Libros de Texto de Educación Primaria. Paradigma, Vol. XXXIV, N° 2, 151 – 173.
- Apostá, P. (2011). Geometría. Consultado 14 de noviembre de 2013 de <http://www.uv.es/~ivorra/Libros/Geometria.pdf>
- Álvarez, M. (2009). Educación a distancia. ¿Para qué y cómo? Recuperado de <http://www.sld.cu/libros/distacia/indice.html>
- Álvarez, M. (2009). Acerca de la resolución de problemas en el área de ciencias. La Habana: Ministerio de Educación.

- Álvarez de Zayas, C. (1990). *Didáctica La Escuela en la Vida*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.
- Álvarez de Zayas, C. (1996). *Hacia una escuela de excelencia*. La Habana: Editorial Academia.
- Arrieta, J.J. (1989). La resolución de problemas y la educación matemática: Hacia una mayor interrelación entre investigación y desarrollo curricular. *Enseñanza de las Ciencias*. Febrero. (1),
- Ausubel, D. P. (2000). *Teoría del aprendizaje significativo*. España: Trillas.
- Báez, R. (2010). Propuesta didáctica para el curso de Geometría de la especialidad de Educación Integral del Instituto Pedagógico Rural “El Mácaro”. Evaluación de una unidad didáctica. Trabajo de grado de Maestría no publicado. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico Rafael Alberto Escobar Lara, Maracay.
- Ballester Sampedro, Sergio (2009). “Didáctica de la Geometría”, *Revista Innovación y experiencias educativas* N° 20.
- Ballester, S. (1982). *Metodología de la enseñanza de la Matemática*. Ciudad de la Habana: Pueblo y Educación.
- _____. (1995). *La Sistematización de los conocimientos matemáticos*. La Habana: Academia.
- _____. (1995). *Cómo sistematizar los conocimientos matemáticos*. La Habana: Academia.
- _____. (1998). *Los ejercicios de nuevo tipo en la enseñanza de la matemática*. La Habana: Pueblo y Educación.
- _____. (2003). *El transcurso de las líneas directrices en los programas de matemática y la planificación de la enseñanza*. La Habana: Pueblo y Educación.
- Ballester, S. y Arango, C. (1995). *Cómo consolidar conocimientos matemáticos*. Ciudad de la Habana: Academia.
- Ballester, S., Almeida, B., Álvarez, A., Arango, C., Batista, L. C., Cruz, I.,...Villegas, E. (2007). *Metodología de la enseñanza de la Matemática*. Tomo I. Holguín: Empresa Poligráfica Holguín.

- Barcia, R. (2000). La preparación geométrica de los estudiantes en Educación Primaria. Tesis defendida en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas, Universidad de Cienfuegos.
- Barell, J. (1999). El Aprendizaje Basado en Problemas. Un enfoque investigativo. Argentina: Ediciones Manantial SRL, Buenos Aires.
- Barreras, F. (1997). Modelo pedagógico para la formación y desarrollo de las habilidades, hábitos y capacidades. Material docente básico. Instituto Pedagógico Latinoamericano y Caribeño (IPLAC). La Habana.
- Barrón, A. (1991). Constructivismo y desarrollo de aprendizajes significativos. Revista Educación. Enero-Abril. p. 294.
- Belmont, J. (1991). Estrategias cognoscitivas y aprendizaje estratégico. Revista Acción Pedagógica. Vol. 2 No 1,2. 1991. p. 56 - 72.
- Benítez, M. L. y Cárdenas O. L. (2008). La enseñanza de la topología a través de la cartografía. Recuperado de: <http://esrlc.com.ve/ibero2008/iberoamerica/files/CARDENAS%20OSCAR.pdf>
- Bermúdez, R. y Pérez, L. (2009). Creatividad y su desarrollo. Instituto Pedagógico Latinoamericano Y Caribeño (IPLAC). Ciudad de La Habana.
- Bermúdez, R. y Rodríguez, M. (1996). Metodología de la Enseñanza y el Aprendizaje. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.
- Bermúdez, R. y Pérez, L. (2009). Creatividad y su desarrollo. Instituto Pedagógico Latinoamericano (IPLAC). Ciudad de La Habana.
- Bless, G. V. (2003). Estrategia didáctica para el aprendizaje de la Geometría basado en problemas. Tesis defendida en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Santiago de Cuba: ISP "Frank País García". Cuba
- Branda, L.A. (2009). El aprendizaje Basado en Problemas. De herejía artificial a respopularis Educación Médica, 12; 11-23.

- Branda, L.A. (2008). El aprendizaje Basado en Problemas. El resplandor tan brillante de otros tiempos. El aprendizaje Basado en Problemas. Una nueva perspectiva de la enseñanza en la universidad. Barcelona: Gedisa; 17-46.
- Bressan, A. Bogisic, B. y Crego, K. (2010). Razones para enseñar geometría en la educación básica. Mirar, construir, decir y pensar. Consultado 15 de noviembre de 2013 desde <http://www.noveduc.com/index.php>
- Brito, Héctor y otros (1987), Psicología General para los ISP (T. 2), Editorial Pueblo y Educación, Ciudad de la Habana.Cuba
- Cabrales, Y. y otros. (2017). Procedimiento didáctico para la resolución de problemas matemáticos. Revista Electrónica, Opuntia Brava, 9(3).La Habana.Cuba
- Camargo Uribe, Leonor (2011). El legado de Piaget a la didáctica de la Geometría. Revista Colombiana de Educación, N.º 60. Bogotá, Colombia.
- Camou, Bernardo (2012). La geometría del espacio: Un fascinante mundo por descubrir, (cita las Actas del 4º Congreso Uruguayo de Educación Matemática). Montevideo, Uruguay. Disponible en Web: <http://semur.edu.uy/curem/actas/procesadas1348011188/actas.pdf>
- Campistrous, L. y Rizo, C. (1996). Aprende a resolver problemas aritméticos. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.
- _____. Didáctica y solución de problemas. Recuperado de <http://www.unesco.cl/medios/biblioteca/documentos/edcienciasdidacticasoluciondeproblemas.pdf> [consultado 20/11/2016]
- Campistrous, L. (1989). Orientaciones metodológicas de décimo grado. La Habana. Editorial Pueblo y Educación. 1989.
- Campistrous, L. (1989). Orientaciones metodológicas de décimo grado. La Habana. Editorial Pueblo y Educación. La Habana.Cuba
- _____. (1993).Lógica y procedimientos lógicos del aprendizaje. Centro de Información y Documentación del Instituto Central de Ciencias Pedagógicas (ICCP). La Habana. Cuba

- Castellanos, B. (2001). Hacia un aprendizaje desarrollador., Instituto Superior Pedagógico “Enrique José Varona”. (ISPEJV). La Habana.Cuba
- Castellanos, D. (2003). Estrategias para promover el aprendizaje desarrollador en el contexto escolar. Universidad Pedagógica “Enrique José Varona”. (ISPEJV). La Habana. Cuba
- Campimtrous, L. y RIZO, C. 2006: El Criterio de Expertos como Método en la Investigación Educativa, pp.1-31, Documento elaborado para el Doctorado Curricular: Ed. Instituto Superior de Cultura Física “Manuel Fajardo”, La Habana. Cuba
- Castellanos, D., Castellanos, B., Llivina, M. J., y Silverio M. (2001). Hacia una concepción del aprendizaje desarrollador. La Habana: Instituto Superior Pedagógico “Enrique José Varona”.(ISPEJV). La Habana.Cuba
- _____ (2007). Aprender y Enseñar en la Escuela. Una concepción desarrolladora. Pueblo y Educación Ciudad de La Habana. Cuba
- Castellano, D. (2004). Aprendizaje y Desarrollo. Temas de Introducción a la formación pedagógica. Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana. Cuba
- Castiblanco, A. C., Urquina, Camargo, L. y Acosta, M. (2004). Pensamiento geométrico y tecnologías computacionales. Instituto Pedagógico Nacional. Bogotá
- Castillo, J. (2000). El aprendizaje cooperativo en las enseñanzas de las matemáticas. Recuperado de <http://www.monografias.com/trabajos> [consultado 12/07/2017]
- Castro, N. V. (2010). La heurística en la formación del profesional de la educación Secundaria Básica. Tesis defendida en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Holguín. Cuba.
- Clements, D. H. y Battista, M. T. (1992).Geometry and espacial reasoning. En Grouws, D. A. (Ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (p. 420-464). Macmillan Publishing Co. New York.
- Clements, D. H. y Battista, M. T. (2001). Logo and Geometry. Journal for Research in Mathematics Education Monograph, V. A: National council of Teachers of Mathematics. Macmillan Publishing Co. New York.

- Danilov, M.A. y Skatkin, M.S. (1978). Didáctica de la Escuela Media. Libros para la Educación. La Habana. Cuba
- Danilov, M. A. (1978). El proceso de enseñanza en la escuela. Libros para la Educación. La Habana. Cuba
- De Armas, N. (2011). Aproximación al estudio de la metodología como resultado científico. En N. de Armas y A. Valle (Ed.), Resultados científicos en la investigación educativa (pp.41-51). La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.
- De Villiers, M. (2010). Algunas reflexiones sobre a Teoría de Van Hiele. Educación Matemática Pesquisa, 12 (3), 400 - 431.
- Dickson, L., Brown, M.y Gibson O. (1991).El aprendizaje de las matemáticas. Ministerio de Educación y Ciencia. Barcelona
- Domínguez, A., Silva, J. L. y Cabrales, Y. (2016). La formulación de problemas en la enseñanza de la Matemática en la educación secundaria básica. Recuperado de <http://revista.redipe.org/index.php/1/article/view/83/0> [consultado 02/11/2017].
- Duharte, E. (2011). Modelo didáctico de desarrollo de la habilidad interpretar en la resolución de problemas geométricos en el nivel medio básico. Tesis defendida en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Santiago de Cuba: Universidad de Ciencias Pedagógicas “Frank País García.” Santiago de Cuba. Cuba
- Enemark, S. & Kjaersdam, F. (2008). El ABP en la teoría y la práctica: la experiencia de Aalborg sobre la innovación del proyecto en la enseñanza universitaria. El aprendizaje Basado en Problemas. Una nueva perspectiva de la enseñanza en la universidad. Gedisa; 66-92. Barcelona
- Escalona, D. M. (1944). La enseñanza de la geometría demostrativa. En Revista de la Sociedad Cubana de Ciencias Físicas y Matemáticas p. 189-194, no. 6, diciembre 1944. La Habana. Cuba
- Feria Uribe, M. A., Espinosa, L. B. y Martínez, N. (2006).Percepción espacial y geometría intuitiva. Una puerta de entrada al aprendizaje significativo de la geometría. Universidad Externado de Colombia, Facultad de Ciencias de la Educación. Colombia

- Fernández, M. T. (2011). Una aproximación ontosemiótica a la visualización y el razonamiento espacial. Tesis defendida en opción al grado científico de Doctor en Ciencias. Recuperado de www.ugr.es/~jgodino/Tesis_doctorales/Teresa_Fernandez_tesis.pdf [consultado 22/12/2017]
- Fernández de Castro, A. y López, A. (2014). Validación mediante criterio de usuarios del sistema de indicadores para prever, diseñar y medir el impacto en los proyectos de investigación del sector agropecuario. Revista Ciencias Técnicas Agropecuarias, (julio-agosto-septiembre, pp. 77-82), ISSN -1010-2760, RNPS-0111, Vol. 23, No. 3
- Ferrer, M. (2000). La resolución de problemas en la estructuración de un sistema de habilidades matemáticas en la escuela media cubana. Tesis defendida en opción al grado científico de doctor en Ciencias Pedagógicas. Recuperado de <http://www.eumed.net/tesis/2010/mfv/index.htm>
- Ferrer, M. y Rebollar, A. (1994). La habilidad para resolver problemas matemáticos. Memorias de la VIII Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. CD-ROM. Costa Rica.
- _____. (2007). Cómo dirigir el proceso de formación de habilidades matemáticas. Ciudad de la Habana: Pedagogía 2007. Memorias.
- _____. (2010). La resolución de problemas, habilidad rectora en la formación inicial del profesional en las Universidades de Ciencias Pedagógicas. En: Revista Cuadernos de Educación y Desarrollo. Vol. 2, N° 17. Recuperado de <http://www.eumed.net/rev/ced/17/fvrm.htm> [consultado 25/08/2016]
- _____. (2012). La resolución de problemas matemáticos y el desarrollo del pensamiento lógico. En: Didáctica de las Ciencias. Nuevas Perspectivas. Cuarta parte. En Revista Educación Cubana. La Habana. Cuba.
- Flórez, A. y Reguera, R. (1979). Geometría. Selección de temas. La Habana. Editorial Pueblo y Educación, 1979.
- _____. (1982). Selección de temas de Geometría. La Habana. Editorial Pueblo y Educación.

- Flórez, A. (1991). Una propuesta de estructuración de un curso de Geometría del espacio para el nivel medio superior en Cuba. Tesis defendida de en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Instituto Superior Pedagógico “Enrique J. Varona” (ISPEJV) La Habana. Cuba
- Fripp, A., y Varela, C. (2012). Pensar geoméricamente. 4º Congreso Uruguayo de Educación Matemática. Recuperado de <http://semur.edu.uy/curem/actas/procesadas1348011188/actas.pdf> [consultado 22/11/2017]
- Frostig, M. (1978). Figuras y formas. Programa para el desarrollo de la percepción visual. Buenos Aires: Médica Panamericana.
- Fuentes, H., Cruz, S. y Álvarez, I. B. (1998). Modelo Holístico Configuracional de la Didáctica. Centro de Estudios de Educación Superior “Manuel F. Gran”(CeeS) Material en CD_ROM Universidad de Oriente, Santiago de Cuba. Cuba
- Fuentes, H. (1996). Dinámica del proceso de enseñanza – aprendizaje Centro de Estudios de Educación Superior “Manuel F. Gran” (CeeS) Material en CD_ROM Universidad de Oriente, Santiago de Cuba. Cuba
- Fuentes, H. (2009). Pedagogía y Didáctica de la Educación Superior. Centro de Estudios de Educación Superior “Manuel F. Gran” (CeeS) Material en CD_ROM Universidad de Oriente, Santiago de Cuba. Cuba
- Galvis, L. J. (2010). Estudio de la geometría del espacio mediante la metodología enseñanza y aprendizaje por proyectos. Trabajo de grado de Maestría no publicado. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico Rafael Alberto Escobar Lara, Maracay.
- Gamboa, R. y Morales, Y. (2008). Alcances y precauciones sobre el uso de software de geometría dinámica tipo constructivo-deductivo. Memoria del X Evento Internacional MATECOMPU [Memoria digital en CD]. Matanzas, Cuba.
- García, G., Cánovas, L., Chávez, J., Sánchez, A., López, J., Silvestre, M.,...Valle, A. (2004). Compendio de Pedagogía. Editorial Pueblo y Educación. La Habana. Cuba
- García, J. E. (2002). Sistema de habilidades profesionales para la disciplina geometría de la carrera Matemática – Computación en función de la enseñanza y el aprendizaje de la resolución de

problemas geométricos de la matemática escolar. Tesis defendida en opción al grado científico de doctor en Ciencias Pedagógicas. ISP “Frank País García”. Santiago de Cuba. Cuba

García, L. El criterio de usuarios. Un método para la evaluación de la factibilidad de los resultados de la investigación educativa. <http://www.ilustrados.com/tema/11343/criterio-usuarios-metodo-para-evaluacion-factibilidad.html>

Garmendia, M. y Guisasola, J. (2014). Aprendizaje basado en problemas, proyectos y casos: diseño e implementación de experiencias en la universidad. Recuperado de <https://web-argitalpena.adm.ehu.es/pdf/USWEB149592.pdf>

Gattegno, C. (1964). El material para la enseñanza de las matemáticas, Aguilar. Madrid.

Gibert, E.M. (2007). Aplicación de una propuesta metodológica que propicie un aprendizaje desarrollador de la matemática: Pedagogía 2007. Evento Internacional, Memorias. La Habana. Cuba

_____. (2009). Fases en la aplicación de una estrategia. Alternativa para la estructuración de la clase de Matemática. En: Memorias del XI Congreso Nacional de Matemática y Computación como número especial del Boletín de la Sociedad Cubana de Matemática y Computación. [CD-ROM]: Educación Cubana, La Habana. Cuba

_____. (2012). Una alternativa didáctica para la estructuración del proceso de enseñanza-aprendizaje en las clases de la asignatura Matemática en la Educación Secundaria Básica. Tesis defendida en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. ISP “Enrique José Varona”(ISPEJV) La Habana. Cuba

González, Edna (2009). La enseñanza de la geometría en la educación primaria. De la enseñanza/aprendizaje de la geometría en la formación de profesores de primaria a la enseñanza de esta materia en algunas escuelas mexicanas: estudio de casos. México. Disponible en Web: <http://www.uv.es/aprengeom/archivos2/GonzalezGuillen09.pdf>

González, M. C. (2006). Propuesta didáctica para la aplicación de la enseñanza basada en problemas a la formación semipresencial en la disciplina de geometría. Tesis defendida en opción al grado científico de doctor en Ciencias. ISP “Enrique José Varona” (ISPEJV) La Habana. Cuba

- González, M., Castellanos, D., Córdova, D., Rebollar, M., Fernández, A. M., Martínez, M.,...Pérez, D. (2001). *Psicología para educadores*. Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. Cuba
- González, M. C. (1999). *Las demostraciones en la Estereometría*. Tesis defendida en opción al título Académico de Máster en Didáctica de la Matemática. ISP “Enrique José Varona” (ISPEJV) La Habana. Cuba
- Grenier, D. (2008). Reasoning and proof in a spatial geometry teaching situation. Université Joseph Fourier, Grenoble y Université du Québec à Montréal (UQAM). ICMI 2008. Monterrey.
- Gutiérrez, Á., y Jaime, A. (1991). El modelo de razonamiento de Van Hiele como marco para el aprendizaje comprensivo de la geometría. Un ejemplo: Los giros. *Revista Educación Matemática*. Agosto. (3).
- Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2012). Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria. *Tecné, Episteme y Didaxis*, 32, 55 – 70.
- Gutiérrez, A. (1989). *Modelo del Razonamiento Geométrico de Van Hiele*. Enseñanza de las Ciencias. Universidad de Valencia. Vol. 7, No. 1, 1989. España.
- _____. (1991). *Proceso y Habilidades en visualización Espacial*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad Valencia. Valencia. España. Recuperado de <http://www.sectormatematica.cl/articulos/visualizacion.pdf>
- _____. (1998). Las representaciones planas de cuerpos 3- dimensionales en la enseñanza de la Geometría Espacial. *Revista EMA*. 1998, Vol. 3. No. 3, p193-220.
- Hoffer, A. R. (1977). Mathematics Resource Project. Geometry and visualization. USA.
- Iglesias, M. y Ortiz, J. (2013). La Demostración en Geometría desde una perspectiva epistemológica. En A. González, J. Sanoja de Ramírez, R. García y Z. Paredes (Eds.), *Memorias de la VII Jornada de Investigación del Departamento de Matemática y VI Jornada de Investigación en Educación Matemática* (pp. 230- 247). Maracay: Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Maracay.

- Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la Geometría: El modelo de Van Hiele. En: Llinares, S., y Sánchez, M. V. (eds.), Teoría y práctica en educación matemática. Sevilla. p. 295-384.
- Jiménez, M.H. (2000). Una concepción en la enseñanza de la matemática para propiciar el aprendizaje desarrollador. Resultado de investigación. La Habana. Instituto Superior Enrique José Varona (ISPEJV). La Habana. Cuba
- _____. (2007). Aplicación de una propuesta metodológica que propicie un aprendizaje desarrollador de la matemática. En: Memorias Pedagogía 2007, Simposio 14. La Habana. Cuba
- Jungk, W. (1982). Conferencias sobre Metodología de la enseñanza de la Matemática. Tres partes. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana. Cuba
- Klingberg, L. (1972). Introducción a la Didáctica General. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. Cuba
- Labarrere, A. (1988). Cómo enseñar a los alumnos de primaria resolver problemas. Edit. Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. Cuba
- _____. (1996). Bases psicopedagógicas de la enseñanza de la solución de problemas matemáticos en la escuela primaria. Edit. Pueblo y Educación. La Habana. Cuba
- León González, Jorge L. 2008. Propuesta didáctica para el desarrollo de habilidades geométricas en el primer ciclo de la Educación Primaria. pág. 80, Tesis defendida en opción al Título Académico de Máster en Ciencias Pedagógicas. Universidad de Cienfuegos "Carlos Rafael Rodríguez"
- Leontiev, A. N. (1979). La actividad en la Psicología. Editorial de libros para la educación. La Habana. Cuba
- LÓPEZ, A. y GONZÁLEZ, V. (2001). La técnica de Iadov: Una aplicación para el estudio [en línea]. Disponible en: <http://www.efdeportes.com/efd32/iadov.htm> [Consulta: febrero 23 2013].
- Llivina, M. (1999). Una propuesta metodológica para contribuir al desarrollo de la capacidad de resolver problemas matemáticos. Tesis defendida en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Instituto Superior Pedagógico "Enrique José Varona". (ISPEJV) Ciudad de la Habana. Cuba

- Londoño Londoño, Luz Delia (2009). Enseñanza del Área de Matemáticas a Través de la Lúdica para Generar Aprendizajes Significativos en los Estudiantes del Grado. 7º de la IER Montegrande, Municipio Sopetrán (Antioquia). Universidad Católica de Manizales.
- Llorente, Y. (2016). La estimulación de la flexibilidad como cualidad de las potencialidades creadoras de los estudiantes mediante el proceso enseñanza-aprendizaje de la Matemática. Tesis defendida en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Universidad de Ciencias Pedagógicas “José de la Luz y Caballero”. Holguín. Cuba
- López, F. (1997). Un Invariante de Habilidad de la disciplina Geometría para la carrera Matemática - Tesis defendida en opción al Título Académico de Master en Ciencias de la Educación. Centro de Estudios de Educación Superior "Manuel F. Gran" (CeeS). Universidad de Oriente. Santiago de Cuba. Cuba
- López, O. García, S. (2008). La Enseñanza de la Geometría. Consultado 6 de noviembre de 2018 desde <http://www.inee.edu.mx/mape/themes/TemaInee/documentos/mapes/geometriacompletoa.pdf>
- Machado, E. y Montes de Oca, N. (2004). Desarrollo de habilidades investigativas. Camagüey: Proyecto ABSTI, CECEDUC.
- Maguiña, A. (2013) Una Propuesta Didáctica para la enseñanza de los cuadriláteros basada en el modelo de Van Hiele. (Tesis de Magister en enseñanza de las Matemáticas) Universidad Católica de Perú.
- Malagón, J. (1998), “Clase de Matemáticas”, en la construcción de la confianza. Una experiencia en proyectos de aula. Bogotá.
- Matos, E. C., Montoya, J. y Fuentes, H. (2007). Eje epistémico de la construcción científica. En CD-ROM .Centro de Estudios de Educación Superior "Manuel F. Gran" (CeeS). Universidad de Oriente. Santiago de Cuba. Cuba
- MINED. (1998). Algunas reflexiones acerca de los resultados científico técnicos e introducción de resultados en el Ministerio de Educación. Material impreso. La Habana. Cuba
- Polya, G. (1976). Cómo plantear y resolver problemas. México: Trillas.

- Peñalva, R. L. (2010). Las matemáticas en el desarrollo de la metacognición. *Política y Cultura* (33), 135-151. Dónde
- Petrovsky, A. V. (1980). *Psicología general*. Editorial Progreso. Moscú.
- Pérez Bueno, Deisy (2012). Procedimientos metodológicos contextualizados para desarrollar habilidades geométricas en los escolares. Disponible en www.vinculando.org [consultado 23/10/2012]
- Pons, R. M., González-Herrero, M. E., & Serrano, J. M. (2008). Aprendizaje cooperativo en matemáticas: un estudio intracontenido. *Anales de Psicología*, 24(2), 253-261.
- Proenza, Y. (2002). Modelo didáctico para el aprendizaje de los conceptos y procedimientos geométricos. Tesis defendida en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Instituto Superior Pedagógico "José de la Luz y Caballero". Holguín. Cuba
- Quaranta, M. E., y Ressia de Moreno, B. (2009). La enseñanza de la geometría en el jardín de infantes. Recuperado de http://www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones/geometria_inicial.pdf
- Quintana Valdés A. Una estrategia didáctica para el proceso de enseñanza- aprendizaje del procesamiento de datos en la asignatura Matemática en la Educación Secundaria Básica (Tesis de doctorado). La Habana, Cuba: UCPEJV; 2011.
- Ramírez, S., Torres, Z., Váldez, K. e Iglesias, M. (2013). La Circunferencia y el Círculo. Una Propuesta Didáctica. En A. González, J. Sanoja de Ramírez, R. García y Z. Paredes (Eds.), *Memorias de la VII Jornada de Investigación del Departamento de Matemática y VI Jornada de Investigación en Educación Matemática* (pp. 217 - 229). Maracay: Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Maracay.
- Rebollar, A. (2000). Una variante para la estructuración del proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática a partir de una nueva forma de organizar el contenido, en la escuela media cubana. Tesis defendida en opción del grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. ISP "Frank País García". Santiago de Cuba. Cuba
- Rebollar, A., Ferrer, M. y Bless, V. (2006). *La enseñanza basada en problemas y ejercicios. Guías Metodológicas para el Maestro*. Santiago de Cuba.

- Rebollar, A. y Ferrer, M. (2007). La enseñanza basada en problemas y ejercicios. Recuperado de <http://www.eumed.net/libros/2010c/743/index.htm> [consultado 15/05/2016]
- Rebollar, A., Ferrer, M., Bless, V., Carbonell, C., Bubaire, A. E., Mustelier, S., Benítez, M., Cobas, E. y Aldana, M.(2010). La enseñanza basada en problemas y ejercicios: hacia una didáctica para estimular aprendizajes. En: Revista “Cuadernos de Educación y Desarrollo”. Vol. 2. No. 17. Julio. Recuperado de www.eumed.net/rev/ced/17/arm.htm [consultado 25/12/2017]
- Rebollar, A y Ferrer, M. (2010). La enseñanza basada en problemas y ejercicios. Recuperado de www.eumed.net/libros/2010c/743/ (FECHA [consultado 02/03/2017]
- Rebollar A y otros. La enseñanza basada en problemas y ejercicios. Curso 62. Congreso Internacional Pedagogía 2009. Ciudad de la Habana. 2009. ISBN 978-959-18-0470-9
- Reiss, K. M., Heinze, A., Renkl, A. y Groß, C. (2008). Reasoning and proof in geometry: effects of learning environment based on heuristic worked-out examples. ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 40(3). 455 – 467.
- Ríos, D. E. (2007). Sentido, criterios y utilidades de la evaluación del aprendizaje basado en problemas. En: Revista Cubana Educación Médica Superior. Vol. 21 No. 3. Julio-septiembre. Recuperado de <http://scielo.sld.cu/scielo.php>
- Rizo, C. (1983). La formación de habilidades y capacidades en la enseñanza de las matemáticas. Edit. Pueblo y Educación. La Habana. Cuba
- Rizo Cabrera, Celia (2012). Tratamiento inicial de la Geometría del Espacio: Una concepción Didáctica. Material en soporte digital disponible en www.es.scribd.com[consultado 25/10/2017]
- Rico, P. y Silvestre, M. (2004). Proceso de enseñanza-aprendizaje. En: Compendio de Pedagogía. La Habana: Pueblo y Educación. p: 68-79.
- Rojas, O. (2006). Alternativa para favorecer el Aprendizaje de la Geometría del espacio en la Escuela. En el evento II Taller de “Atención a la diversidad. Retos y alternativas” en el Instituto Pedagógico “Conrado Benítez”. Ciudad de Cienfuegos. Cuba.
- _____. (2007). Razones para mantener la enseñanza de la geometría en la escuela. Tendencia para la enseñanza de la geometría del espacio. II Evento Nacional sobre la enseñanza de las Ciencias

Exactas, ENCE 2007, Instituto Superior Pedagógico” José de la Luz y Caballero”. Ciudad de Holguín. Cuba

_____. (2007). La enseñanza de la Geometría del espacio en la escuela: una propuesta para su aprendizaje. Tendencia para la enseñanza de la geometría del espacio. II Evento Nacional sobre la enseñanza de las Ciencias Exactas, ENCE 2007, Instituto Superior Pedagógico “José de la Luz y Caballero”. Ciudad de Holguín, Cuba

_____. (2007). Una Concepción Didáctica para favorecer la enseñanza-aprendizaje de la Geometría del espacio en la escuela cubana. Revista de la Confederación Iberoamericana de Educación Católica, CIEC. EDUCACIÓN HOY. El aprendizaje de las Matemáticas. Julio-septiembre2007. Bogotá, D.C. Colombia.

_____. (2007). La Geometría del espacio: Medios para favorecer su enseñanza aprendizaje mediante una concepción didáctica. X Congreso Nacional de Matemática y Computación, COMPUMAT 2007, Instituto Superior Pedagógico “José de la Luz y Caballero”. Ciudad de Holguín. Cuba

_____. (2009). Modelo didáctico para favorecer la enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio con un enfoque desarrollador. Tesis defendida en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Universidad de Ciencias Pedagógicas, Holguín. Cuba

Rubinstein, S.L. (1966). El proceso del pensamiento. Universitaria. La Habana. Cuba

Rubinstein, S, L (1973). Principios de psicología general. Instituto Cubano del Libro. La Habana. Cuba

Sánchez, F., Guadarrama, P. y Araujo, R. (s/a). Lecciones de Filosofía Marxista-Leninista. Tomo II.

Edit. Pueblo y Educación. La Habana. Cuba

Sánchez, J. e Iglesias, M. (2012). El desempeño de los docentes de matemática y sus necesidades formativas. Paradigma, Vol. XXXIII (1), 155 – 173.

Sánchez, N., y Bonilla, M. (1998). Matemáticas escolares asistidas por computador. Actividades en el aula. Módulo 3, Proyecto curricular de Licenciatura en Matemáticas. Bogotá: Universidad Distrital.

- Santos, E. M. (2007). Informe del resultado: Caracterización de las video clases desde una concepción desarrolladora. Proyecto. Un modelo para el desempeño profesional del profesor de preuniversitario. Instituto Central de Ciencias Pedagógicas (ICCP) La Habana. Cuba
- Santos, L. M. (1994). La resolución de problemas en el aprendizaje de la Matemática. México: Departamento de Matemática Educativa. CINVESTAV-IPN.
- Sandoval, A. (2005). Programas de Matemática para la Educación de Jóvenes y Adultos.: Cátedra de adultos, ISP “Enrique José Varona” La Habana. Cuba
- Sarasua, J. M., Ruiz de Gauna, J. G. y Arrieta, M. (2013). Prevalencia de los niveles de razonamiento geométrico a lo largo de diferentes etapas educativas. En Revista de Psicodidáctica, 18 (2), 313 – 329.
- Schoenfeld, A. (1985). Sugerencias para la enseñanza de la resolución de problemas. En: “La enseñanza de la Matemática a debate”. Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid.
- _____. (1985). Mathematical Problem Solving. New York: Mac Millán.
- _____. (1992). La enseñanza del pensamiento matemático y la resolución de problemas. En Revista Currículo y Cognición.
- _____. (1992). Aprendiendo a pensar matemáticamente. Libro para investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. New York: Mac Millán.
- _____. (1993). Resolución de problemas. Elementos para una propuesta en el aprendizaje de la matemática. (s.l.) Cuadernos de Investigación, No. 25.
- Silvestre, M. y Zilberstein, J. (2000). ¿Cómo hacer más eficiente el aprendizaje? México: Ediciones CEIDE.
- _____. (2000). Enseñanza y aprendizaje desarrollador. Instituto Central de Ciencias Pedagógicas (ICCP) La Habana. Cuba
- _____. (2002). Hacia una didáctica desarrolladora. Edit. Pueblo y Educación. La Habana. Cuba
- Suárez, C. (2004). La identificación de problemas matemáticos en la Educación Primaria. Tesis defendida en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Instituto Superior Pedagógico “Enrique José Varona”. (ISPEJV) Ciudad de la Habana. Cuba

- Suero, F. (2001). Una propuesta metodológica que contribuya al mejoramiento de la enseñanza aprendizaje del Álgebra a través de la formación de conceptos. Tesis de Maestría en Didáctica de la Matemática. Instituto Superior Pedagógico “Enrique José Varona” (ISPEJV). La Habana. Cuba
- Torres Fernández, Paul. 2010. La matemática y su enseñanza en Cuba, según los estudios de Evaluación Educativa. Ciencias Pedagógicas: Revista Electrónica del Instituto Central de Ciencias Pedagógicas. Vol. 1.
- Uribe, S. M., Cárdenas, O. L., Becerra, J. F. (2014). Teselaciones para niños: una estrategia para el desarrollo del pensamiento geométrico y espacial de los niños. En Revista Educación Matemática. (26),2. Agosto. pp. 135-160.
- Valle, A. (2010). La Investigación Pedagógica, otra mirada. Instituto Central de Ciencias Pedagógicas (ICCP). La Habana. Cuba.
- Vargas, G. y Gamboa, R. (2012). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. Uniciencia, 27 (1), 74-94.
- Vigotski, L. S. (1982). Pensamiento y lenguaje. Editorial Pueblo y Educación. La Habana. Cuba.
- Vigotski, L.S. (1988). Historia del desarrollo de las funciones psíquicas superiores: En Revista Científico Técnica. La Habana. Cuba
- Yakoliev, N. (2007). Metodología y técnica de la clase. Edit. Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. Cuba.
- Zilberstein, J. y Silvestre, M. (1999). Una didáctica para una enseñanza y un aprendizaje desarrollador. Instituto Central de Ciencias Pedagógicas (ICCP). Ciudad de la Habana. Cuba
- Zilberstein Toruncha, J. y Portela Falgueras, R. (2002). Una concepción desarrolladora de la motivación y el aprendizaje de las ciencias. (s.l.)(s.n.).
- Zillmer, W. (1981). Complementos de Metodología de la enseñanza de la Matemática. (s.l.): Libros para la Educación.

Anexo 1

Guía de observación a clases de Matemática

Objetivo: Constatar a través de la observación a clases, el desempeño de los estudiantes en cuanto a la resolución de problemas de la geometría del espacio y el papel del profesor en la conducción del desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial, dentro del proceso de resolución de tales problemas.

Indicadores.

1. Dificultades que presentan los estudiantes en la resolución de ejercicios y problemas de cálculo y demostración de la geometría del espacio.
2. Papel del profesor para contribuir al desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial en sus estudiantes, a través de la resolución de ejercicios y problemas de cálculo y demostración de la geometría del espacio.

Anexo 2

Encuesta a profesores de preuniversitario

Objetivo: Diagnosticar el nivel de conocimientos de los profesores de la enseñanza preuniversitaria sobre las habilidades del pensamiento geométrico espacial y su tratamiento para desarrollarlas.

Estimado profesor: para constatar el estado actual del desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial en los estudiantes de preuniversitario, se necesita su colaboración a través de los criterios que pueda ofrecer al respecto.

Para ello, necesitamos que de forma anónima responda con sinceridad las preguntas que realizamos en esta encuesta.

Cuestionario

De los elementos que a continuación le relacionamos marque con una X los que usted considere se corresponden con la respuesta a la pregunta que se le realiza.

1. A continuación relacionamos habilidades del pensamiento geométrico espacial recogidas en la literatura científica. ¿Cuáles de ellas usted utiliza en sus clases para contribuir al desarrollo en sus estudiantes de este componente del pensamiento matemático, en correspondencia con sus características como estudiantes de preuniversitario?

- A. coordinación visomotriz
- B. percepción figura-fondo
- C. constancia perceptual
- D. percepción de posición en el espacio
- E. percepción de las relaciones espaciales
- F. identificar una figura específica (el foco) en un dibujo (el fondo)
- G. reconocer que un objeto tiene propiedades invariantes
- H. determinar la relación de un objeto con relación a otro
- I. distinguir semejanzas y diferencias entre los objetos
- J. relacionar sus características con otros objetos que estén ya sea a la vista o no

- K. recordar con precisión un objeto que no está más a la vista
 - L. identificar propiedades de figuras planas
 - M. deducir consecuencias de las relaciones entre figuras
 - N. construir manualmente un cuerpo geométrico
 - O. representar en un plano al cuerpo geométrico en las vistas frontal, lateral, desde arriba y desde abajo
2. Seleccione las razones por las cuales usted no ha utilizado en el proceso de enseñanza – aprendizaje de la geometría del espacio las habilidades que no consideró en la pregunta anterior.
- A. no estoy familiarizado con ellas
 - B. no comprendo en qué consisten
 - C. pienso que el estudiante las debe tener desarrolladas desde enseñanzas anteriores
 - D. no sé si las he utilizado de forma inconsciente
 - E. no las considero necesarias
 - F. no pienso que sean habilidades
3. ¿Cuáles de las siguientes insuficiencias presentan sus estudiantes para resolver problemas de la geometría del espacio?
- A. identificar figuras planas y cuerpos geométricos
 - B. identificar propiedades de figuras planas
 - C. reconocer las relaciones existentes entre las figuras y los cuerpos geométricos
 - D. representar cuerpos geométricos mediante un esbozo gráfico
 - E. calcular el área y volumen,
 - F. extraer información de los datos que se dan en las condiciones del problema
 - G. relacionar la información que se extraen de los datos
 - H. deducir consecuencias de las relaciones entre las informaciones extraídas de los datos
 - I. determinar las informaciones y consecuencias que resultan imprescindibles para llegar a la exigencia del problema

J. elaborar conscientemente un plan de solución

K. escribir organizadamente la solución del problema

L. fundamentar los pasos en la solución del problema

4. ¿Conoce usted alguna metodología para el desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial?

Sí No

5. ¿Ha recibido usted alguna preparación teórica o metodológica para conducir el proceso de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial?

Sí No

Anexo 3

Resultados de la encuesta a profesores de preuniversitario

Objetivo: Tabular los resultados de la encuesta a profesores de preuniversitario sobre el estado actual del desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial en los estudiantes.

Pregunta	Ítems	Cantidad de profesores que lo seleccionó	%
1	A	2	20
	B	1	10
	C	0	0
	D	3	30
	E	8	80
	F	3	30
	G	9	90
	H	6	60
	I	7	70
	J	10	100
	K	1	10
	L	10	50
	M	7	70
	N	0	0
	O	0	0
2	A	7	70
	B	8	80
	C	10	100
	D	7	70
	E	3	30
	F	8	80

3	A	10	100
	B	10	100
	C	10	100
	D	10	100
	E	10	100
	F	10	100
	G	10	100
	I	10	100
	J	10	100
	K	10	100
	L	10	100
4	Sí	0	0
	No	10	100
5	Sí	2	20
	No	8	80

Anexo 4

Entrevista a metodólogos de Matemática

Objetivo: Constatar las limitaciones que desde el punto de vista metodológico, presentan los profesores de la educación preuniversitaria para conducir el proceso de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial de los estudiantes.

Para el desarrollo de la entrevista se les presenta un material a los metodólogos sobre las habilidades del pensamiento geométrico espacial extraídas de la revisión bibliográfica realizada por el investigador. Estas son explicadas detalladamente por el autor para que comprendan en qué consiste cada una de ellas.

Una vez que, terminada esta presentación, se comienza la entrevista.

Guía de la entrevista

Se realizará a partir de las siguientes interrogantes:

1. ¿Cuáles de estas habilidades no son frecuentemente utilizadas por usted y los docentes en el proceso de enseñanza–aprendizaje de la Matemática en el preuniversitario? Argumente su respuesta.
2. ¿Conoce alguna metodología para el desarrollo de estas habilidades?
3. En las preparaciones metodológicas que diseña para los profesores, ¿ha tratado algún tema relacionado con el desarrollo de estas habilidades? ¿Cuál o cuáles?

Anexo 5

Orientaciones y habilidades del pensamiento geométrico espacial en la realización de los procedimientos desarrolladores

Procedimiento	Orientaciones para el trabajo en equipo	Habilidades que con mayor importancia se desarrollan
Reconocimiento visual	<ol style="list-style-type: none"> 1. Lee detenidamente el problema y extrae los datos y lo que se pide determinar. 2. Haz en tu libreta un esbozo de la figura geométrica que se da en los datos y refleja en ella lo que se da y lo que se pide. 3. Representa en tu libreta esta figura vista de frente, de un lado y desde arriba. 4. Observa el esbozo de la figura geométrica realizado y la representación realizada desde las diferentes vistas e identifica todas las figuras geométricas que lo componen. 5. Representa en tu libreta la forma real de esas figuras geométricas. 	Habilidades del nivel visualización, identificación y representación de objetos geométricos.
Extracción de información	<ol style="list-style-type: none"> 6. Formula las definiciones de las figuras geométricas identificadas. 7. Si conoces teoremas o proposiciones o propiedades asociados a las figuras geométricas identificadas fórmulaslos. 8. Precisa las definiciones y teoremas, proposiciones o propiedades que consideres se ajustan más a lo que se da y lo que se pide en el problema. 	Habilidades del nivel visualización, identificación y representación de objetos geométricos.
Establecimiento de relaciones	<ol style="list-style-type: none"> 9. Analiza cuáles son las relaciones que puedes establecer entre esas definiciones, teoremas, proposiciones o propiedades que te den una idea de cómo obtener lo que se te pide en el problema. 	Habilidades del nivel de análisis – síntesis, de razonamiento deductivo y de rigor.
Deducción de consecuencias	<ol style="list-style-type: none"> 10. De las relaciones que se pueden establecer entre el cuerpo geométrico y esas figuras planas y entre ellas, prestando atención a los datos que se dan y a lo que se pide, qué nuevos datos y relaciones entre ellos puedes obtener, que te puedan servir para pasar de lo dado a lo buscado. 	Habilidades del nivel de análisis – síntesis, de razonamiento deductivo y de rigor.
Búsqueda de las relaciones necesarias y suficientes	<ol style="list-style-type: none"> 11. Tomando en cuenta todas las informaciones que te aportan los conceptos y teoremas asociados al cuerpo geométrico y las figuras planas identificadas, así como los nuevos datos obtenidos, las relaciones entre ellos y en correspondencia a lo que se pide, determina aquellas relaciones que consideres necesarias y suficientes para solucionar el 	Habilidades del nivel de análisis – síntesis, de razonamiento deductivo y de rigor.

	<p>problema.</p> <p>12. Sobre la base de esas relaciones necesarias y suficientes, determina una o varias vías de solución del problema y para cada una de ellas elabora un plan de solución.</p>	
--	---	--

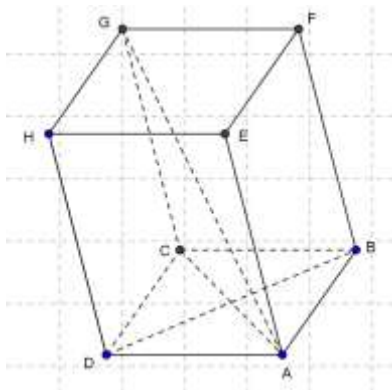
Anexo 6

Ejemplos de tareas de aprendizaje para el eslabón de preparación y desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial.

Ejemplo 1. Tarea de definición y caracterización de un cuerpo geométrico y de sus figuras geométricas tanto planas como espaciales que lo conforman.

Lea el siguiente problema:

En la figura se da un paralelepípedo ABCDEFGH en cuyas bases se tiene un cuadrilátero de diagonales iguales y perpendiculares, que se cortan en su punto medio. Las aristas laterales del mismo son perpendiculares a las bases del paralelepípedo. La diagonal \overline{AG} del paralelepípedo mide 3,0 m. Si las diagonales de las bases de este tienen la misma longitud que sus aristas laterales, calcula el volumen del paralelepípedo.



Luego de leído detenidamente este problema realice las siguientes acciones:

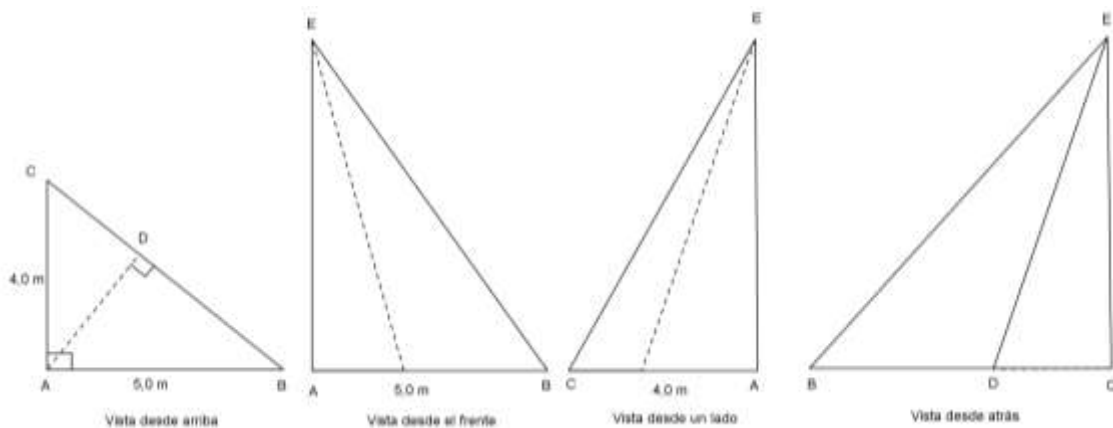
1. Identifica las figuras planas que están en las bases y en las caras de este paralelepípedo.
Argumenta cómo lograste identificarlas.
2. Identifica el tipo de paralelepípedo que se presenta en la figura. Argumenta cómo lograste identificarlo.

- Identifica las figuras planas que observas en el interior del paralelepípedo. Argumenta cómo lograste identificarlas y representa la forma real de estas, estableciendo la escala de 1,0 cm por 1,0 m.

Ejemplo 2. Tarea de elaboración de vías de solución a problemas.

Dado el siguiente problema:

Determine el área total del cuerpo geométrico cuyas vistas se representan en la figura y conocido que $\angle EDA = 47,6^\circ$.



- Representa un esbozo del cuerpo geométrico que se corresponde con las vistas dadas. Identifícalo y argumenta qué hiciste para ello.
Nota: las líneas discontinuas representan rectas que se observan por detrás de la vista dada.
- Identifica las figuras planas que están en las bases y en las caras de este cuerpo. Argumenta cómo lograste identificarlas.
- Identifica las figuras planas que observas en el interior del cuerpo. Argumenta cómo lograste identificarlas y representa su forma real, establece la escala de 1,0 cm por 1,0 m.
- Formula las definiciones y teoremas relacionados con el cuerpo y con las figuras planas identificadas, en correspondencia con lo que se da y lo que se pide determinar.
- De las relaciones que se pueden establecer entre el cuerpo geométrico y esas figuras planas y entre ellas, presta atención a los datos que se dan y a lo que se pide, qué nuevos datos y relaciones entre ellos puedes obtener, que te puedan servir para pasar de lo dado a lo buscado.

6. Ten en cuenta todas las informaciones que te aportan los conceptos y teoremas asociados al cuerpo geométrico y las figuras planas identificadas, así como los nuevos datos obtenidos, las relaciones entre ellos y en correspondencia a lo que se pide, determina aquellas relaciones que consideres necesarias y suficientes para solucionar el problema.
7. Sobre la base de esas relaciones necesarias y suficientes, determina una o varias vías de solución del problema y para cada una de ellas, elabora un plan de solución.
8. Comprueba cuál es el plan de solución que te permite resolver el problema de una forma más racional.
9. Resuelve el problema, siguiendo ese plan de solución.

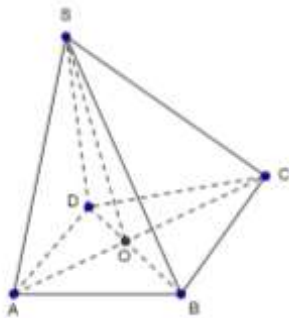
Anexo 7

Instrumento de diagnóstico para medir el nivel de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial de los estudiantes (prueba pedagógica de entrada en el pre-experimento).

Objetivo: Diagnosticar el nivel de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial alcanzado por los estudiantes antes de aplicar la metodología.

Cuestionario

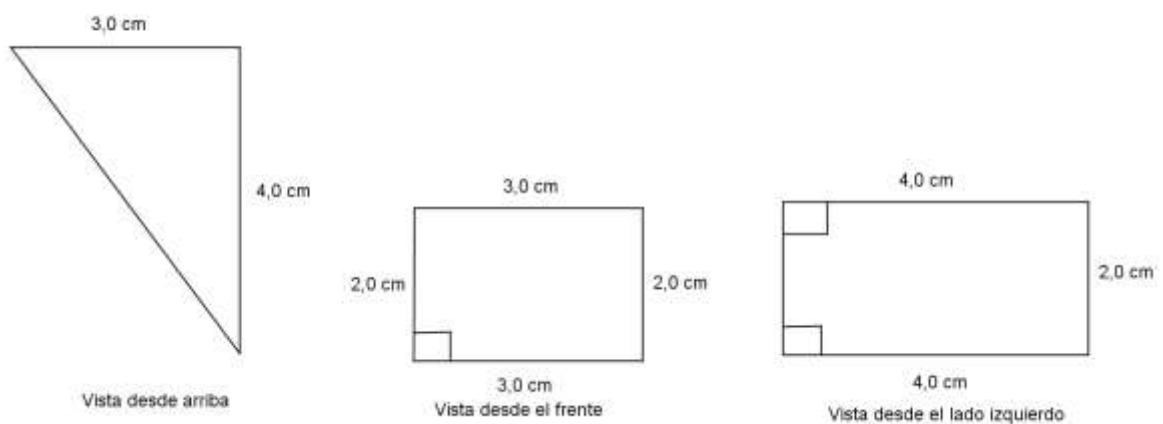
1. En la figura se muestra un cuerpo geométrico que tiene como base un cuadrilátero convexo. Las diagonales de la base del mismo son iguales, se cortan en su punto medio y son perpendiculares. La altura del cuerpo es perpendicular a su base y el pie de esta, coincide con el punto de intersección de las diagonales de la base; $\overline{AB} = \overline{BD}$.
 - a) Identifica las figuras planas que están en las caras y la base de este cuerpo geométrico y al interior del mismo.
 - b) Formula las definiciones de estas figuras planas.
 - c) Formula todas las propiedades y fórmulas que conozcas de estas figuras planas.
 - d) Describe e identifica el cuerpo geométrico dado. Argumenta cómo lo reconociste.
 - e) Formula todas las propiedades y fórmulas relacionadas con este cuerpo geométrico.
 - f) Representa las figuras planas que observas cuando observas el cuerpo desde el frente, desde un lado y desde arriba. Identifica cada una de esas figuras geométricas.



En esta pregunta se evalúan las habilidades:

- Identificar las figuras planas y espaciales que conforman un objeto geométrico en el espacio.
- Describir el aspecto físico de un objeto geométrico.
- Identificar un objeto geométrico representado en diferentes vistas.
- Representar un objeto geométrico tridimensional en lo bidimensional.
- Identificar conceptos, teoremas y fórmulas, relacionados con los objetos geométricos.
- Reproducir la definición de los conceptos, la formulación de los teoremas y las fórmulas, relacionados con los objetos geométricos.

2. En la figura se ha representado un cuerpo geométrico visto desde diferentes ángulos:

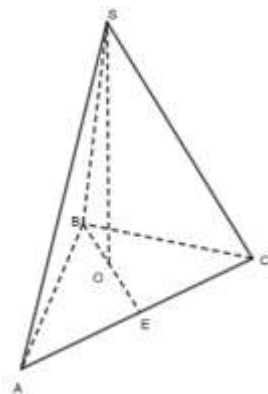


- Representa el cuerpo geométrico al que le corresponden estas vistas.
- Identifícalo. Argumenta cómo lo hiciste.
- Identifica las figuras planas que están en la superficie de este cuerpo geométrico. Argumenta cómo las identificaste.

En esta pregunta se evalúan las habilidades:

- Identificar las figuras planas y espaciales que conforman un objeto geométrico en el espacio.
 - Identificar un objeto geométrico representado en diferentes vistas.
 - Representar un objeto geométrico representado en diferentes vistas.
3. En la figura se representa una pirámide recta de base triangular; E es el punto medio del lado \overline{AC} , EB bisectriz del $\sphericalangle ABC$ y $\sphericalangle ABC = 60^\circ$. Calcula el área total y el volumen de la pirámide

si se conoce que $\overline{AC} = \overline{AS} = 5,0 m$ y \overline{OS} es su altura. Descubre una relación entre los volúmenes de las pirámides SAEB y SBEC.



En esta pregunta intencionalmente se evalúan las habilidades:

- Determinar relaciones espaciales entre las figuras geométricas planas, entre las espaciales y entre las planas y las espaciales que conforman un objeto geométrico.
- Establecer relaciones entre las definiciones de los conceptos, las formulaciones de los teoremas y los procedimientos geométricos asociados a objetos geométricos.
- Deducir consecuencias de las relaciones entre las definiciones de los conceptos, las formulaciones de los teoremas y los procedimientos geométricos asociados a objetos geométricos.
- Descubrir propiedades de las figuras planas y geométricas que conforman un objeto geométrico y del propio objeto geométrico.

Anexo 8

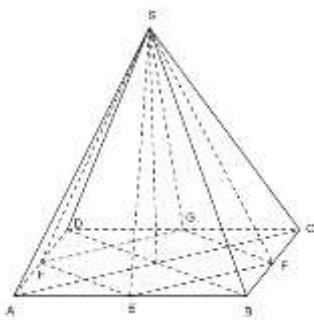
Instrumento de diagnóstico para medir el nivel de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial de los estudiantes (prueba pedagógica de salida para el pre-experimento).

Objetivo: Diagnosticar el nivel de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial alcanzado por los estudiantes después de aplicada la metodología.

Cuestionario

1. En la figura se muestra un cuerpo geométrico ABCDS que tiene como base un paralelogramo. Las diagonales de la base son iguales; E, F, G y H son los puntos medios de las aristas \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} y \overline{AD} , respectivamente. La altura del cuerpo es perpendicular a su base y el pie de esta, coincide con el punto de intersección de las diagonales de la base.

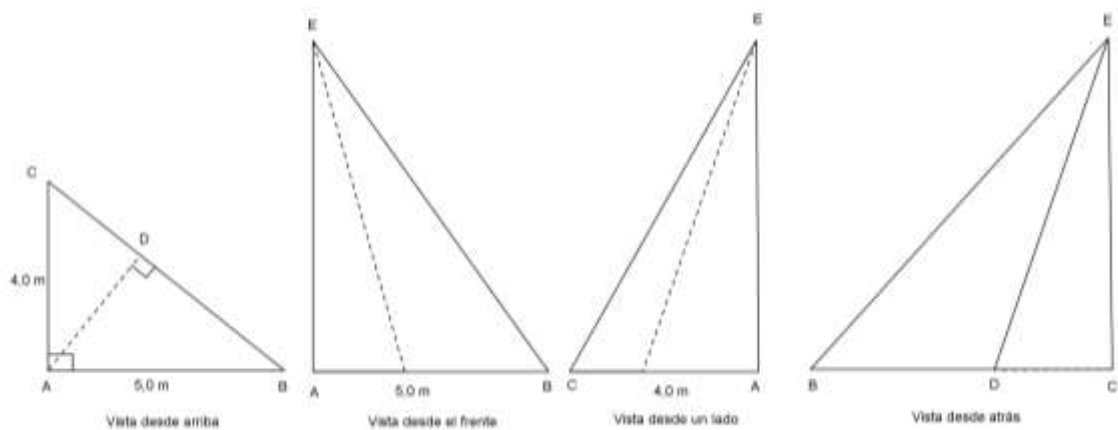
- Identifica las figuras planas que están en las caras y la base de este cuerpo geométrico y al interior del mismo.
- Formula las definiciones de estas figuras planas.
- Formula todas las propiedades y fórmulas que conozcas de estas figuras planas.
- Describe e identifica el cuerpo geométrico dado, así como el cuerpo geométrico que se encuentra dentro de este. Argumenta cómo los reconociste.
- Formula todas las propiedades y fórmulas relacionadas con estos cuerpos geométricos.
- Representa las figuras planas que observas del cuerpo, desde el frente, desde un lado y desde arriba. Identifica cada una de esas figuras geométricas.



En esta pregunta se evalúan las habilidades:

- Identificar las figuras planas y espaciales que conforman un objeto geométrico en el espacio.
- Describir el aspecto físico de un objeto geométrico.
- Identificar un objeto geométrico representado en diferentes vistas.
- Representar un objeto geométrico tridimensional en lo bidimensional.
- Identificar conceptos, teoremas y fórmulas, relacionados con los objetos geométricos.
- Reproducir la definición de los conceptos, la formulación de los teoremas y las fórmulas, relacionados con los objetos geométricos.

2. En la figura se ha representado un cuerpo geométrico visto desde diferentes ángulos:



- Representa el cuerpo geométrico al que le corresponden estas vistas.
- Identifícalo. Argumenta cómo lo hiciste.
- Identifica las figuras planas que están en la superficie de este cuerpo geométrico. Argumenta cómo las identificaste.

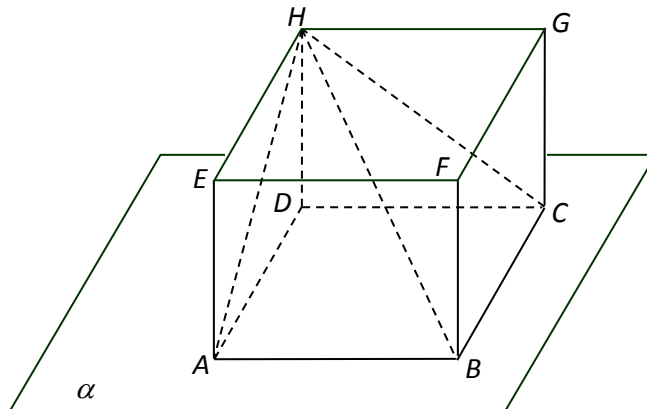
En esta pregunta se evalúan las habilidades:

- Identificar las figuras planas y espaciales que conforman un objeto geométrico en el espacio.
- Identificar un objeto geométrico representado en diferentes vistas.
- Representar un objeto geométrico representado en diferentes vistas.

3. La figura muestra un prisma recto ABCDEFGH cuya base inferior es el paralelogramo ABCD situado sobre el plano α . En su interior se observa la pirámide ABCDH cuya base coincide

con la del prisma. La cara ABH de la pirámide es un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es HB. Además, de la pirámide se conoce que: el perímetro de su base es 14 cm; el volumen es 12 cm^3 ; $AD < AB$; el ángulo que forma HA con su proyección es de 45° .

- Demuestra que la base de la pirámide es un rectángulo.
- Calcula el área total del prisma.
- Descubre una relación entre los volúmenes del prisma y de la pirámide dados.



En esta pregunta intencionalmente se evalúan las habilidades:

- Determinar relaciones espaciales entre las figuras geométricas planas, entre las espaciales y entre las planas y las espaciales que conforman un objeto geométrico.
- Establecer relaciones entre las definiciones de los conceptos, las formulaciones de los teoremas y los procedimientos geométricos asociados a objetos geométricos.
- Deducir consecuencias de las relaciones entre las definiciones de los conceptos, las formulaciones de los teoremas y los procedimientos geométricos asociados a objetos geométricos.
- Descubrir propiedades de las figuras planas y geométricas que conforman un objeto geométrico y del propio objeto geométrico.

Anexo 9

Encuesta a expertos

Objetivo: Corroborar la factibilidad y pertinencia de la metodología para la conducción por los profesores de preuniversitario del proceso de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial en los estudiantes de este nivel de enseñanza.

Usted ha sido seleccionado para ser consultado sobre el nivel de factibilidad y pertinencia que le confiere a los elementos que conforman la metodología para la conducción por los profesores de preuniversitario del proceso de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial en los estudiantes de este nivel de enseñanza.

Se le agradece el esfuerzo que pueda realizar en la colaboración con esta investigación.

Realice una autovaloración de su nivel de conocimientos con relación a elementos teórico-metodológicos relacionados con el tema de esta investigación. Marque con una X en una de las casillas de la tabla siguiente, desde ningún conocimiento (valor 0), hasta el máximo de conocimiento e información valor 9.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Según las fuentes de argumentación que se relacionan en la siguiente tabla marque con una X las fuentes que considere han influido más en el nivel del conocimiento que tiene sobre la temática abordada en una de las tres opciones que se dan: alto, medio y bajo.

Tabla con las fuentes de argumentación:

Fuentes de argumentación	Grado de influencia de cada una de las fuentes según sus criterios		
	A (Alto)	M (Medio)	B (Bajo)
Análisis teóricos realizados por Ud.			
Experiencia obtenida			
Trabajo de autores nacionales			
Trabajo de autores extranjeros			

Propio conocimiento del estado problema en el extranjero.			
Su intuición			

En la tabla siguiente marque, con una cruz (X) la casilla que se corresponda con el nivel de factibilidad y pertinencia de la metodología que usted le otorga a los indicadores declarados.

Escala: MA – Muy adecuado, A – Adecuado; PA – Poco adecuado; I – Inadecuado.

Indicadores	Cualidades				
	MA	A	PA	I	Total
I.1. Fundamentación teórica de la metodología.					
I.2. Pertinencia de la precisión de las habilidades del pensamiento geométrico espacial.					
I.3. Pertinencia de los procedimientos desarrolladores para el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial.					
I.4. Estructura de la metodología (eslabones, componentes).					
I.5. Pertinencia de las orientaciones metodológicas para cada uno de los eslabones de la metodología.					
I.6. Pertinencia de la metodología para el objetivo propuesto.					
I.7. Pertinencia de la metodología en el actual perfeccionamiento de los programas de Matemática en la educación preuniversitaria.					

Refiera en síntesis cualquier otro criterio que usted tenga con relación a la metodología:

Anexo 10

Determinación del nivel de competencia de los expertos

Objetivo: Determinar el nivel de competencia de los expertos seleccionados para la valoración de la factibilidad y pertinencia de la metodología.

Experto No.	k_c	k_a	k	Nivel
1	1	0,8	0,9	Alto
2	0,9	0,9	0,9	Alto
3	0,8	0,9	0,85	Alto
4	0,9	0,8	0,85	Alto
5	1	0,8	0,9	Alto
6	1	0,9	0,95	Alto
7	0,9	0,9	0,9	Alto
8	0,9	0,9	0,9	Alto
9	0,9	0,9	0,9	Alto
10	1	0,8	0,9	Alto
11	0,8	0,9	0,85	Alto
12	0,8	0,9	0,85	Alto
13	1	0,9	0,95	Alto
14	0,9	0,9	0,9	Alto
15	1	0,9	0,95	Alto
16	1	0,8	0,85	Alto
17	0,8	0,9	0,85	Alto
18	0,9	0,8	0,85	Alto
19	1	0,9	0,95	Alto
20	0,9	0,8	0,85	Alto
21	0,8	0,9	0,85	Alto
22	0,9	0,9	0,85	Alto
23	1	0,9	0,95	Alto
24	1	0,9	0,95	Alto
25	1	0,8	0,85	Alto
26	0,9	0,9	0,9	Alto
27	0,9	0,8	0,85	Alto
28	0,9	0,8	0,85	Alto

29	1	0,9	0,95	Alto
30	1	0,9	0,95	Alto

Anexo 11

Tabla de frecuencias a partir de la información recogida sobre la valoración de los expertos a cada uno de los indicadores planteados para la valoración de la factibilidad y pertinencia de la metodología.

Indicadores	Frecuencia Absoluta				Frecuencia Relativa Acumulada			
	MA	A	PA	I	MA	A	PA	I
I.1. Fundamentación teórica de la metodología.	17	10	3	0	0,57	0,9	1	1
I.2. Pertinencia de la precisión de las habilidades del pensamiento geométrico espacial.	20	10	0	0	0,67	1	1	1
I.3. Pertinencia de los procedimientos desarrolladores para el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial.	24	5	1	0	0,8	0,97	1	1
I.4. Estructura de la metodología (eslabones, componentes).	25	5	0	0	0,83	1	1	1
I.5. Pertinencia de las orientaciones metodológicas para cada uno de los eslabones de la metodología.	26	4	0	0	0,87	1	1	1
I.6. Pertinencia de la metodología para el objetivo propuesto.	28	2	0	0	0,93	1	1	1
I.7. Pertinencia de la metodología en el actual perfeccionamiento de los programas de Matemática en la educación preuniversitaria.	24	5	1	0	0,8	0,97	1	1

Anexo 12

Determinación de los puntos de corte

Indicadores	MA	A	PA	Suma	Promedio	N	N-P
	I.1. Fundamentación teórica de la metodología.	0,18	1,28	3,49	4,95	1,65	1,15
I.2. Pertinencia de la precisión de las habilidades del pensamiento geométrico espacial.	0,44	3,49	3,49	7,42	2,47	1,15	-1,32
I.3. Pertinencia de los procedimientos desarrolladores para el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial.	0,84	1,88	3,49	6,21	2,07	1,15	-0,92
I.4. Estructura de la metodología (eslabones, componentes).	0,95	3,49	3,49	7,93	2,64	1,15	-1,49
I.5. Pertinencia de las orientaciones metodológicas para cada uno de los eslabones de la metodología.	1,13	3,49	3,49	8,11	2,7	1,15	-1,55
I.6. Pertinencia de la metodología para el objetivo propuesto.	1,48	3,49	3,49	8,46	2,82	1,15	-1,67
I.7. Pertinencia de la metodología en el actual perfeccionamiento de los programas de Matemática en la educación preuniversitaria.	0,84	3,49	3,49	7,82	2,61	1,15	-1,46
Puntos de corte	5,86	15,84	24,43	32,32			

Muy

Adecuado

Adecuado

Poco Adecuado

Inadecuado

5,86	15,84	24,43
-------------	--------------	--------------

Indicadores	Categorías
I.1	Muy adecuado
I.2	Muy adecuado
I.3	Muy adecuado
I.4	Muy adecuado
I.5	Muy adecuado
I.6	Muy adecuado
I.7	Muy adecuado